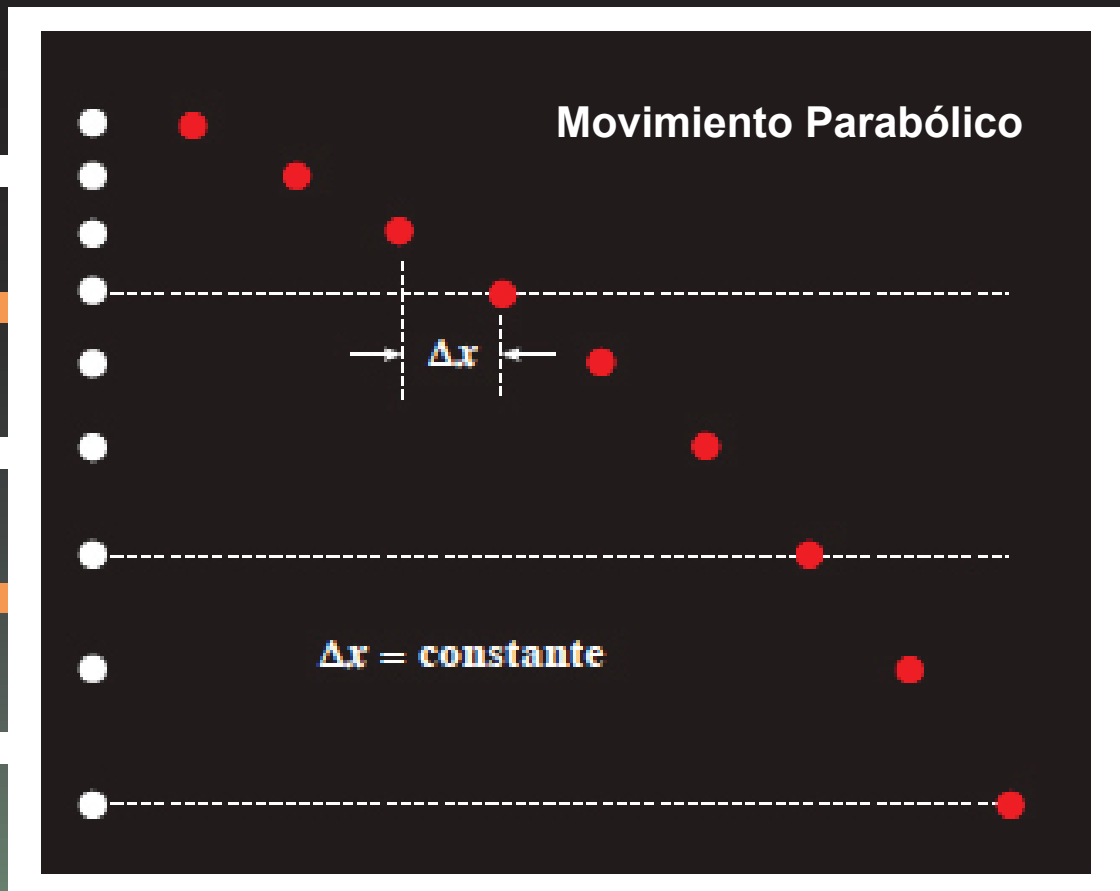


FÍSICA

Cuarto Año de Bachillerato

JÚPITER FIGUERA – JUAN GUERRERO



**JUAN ANDRÉS GUERRERO
JÚPITER FIGUERA YIBIRÍN**

FÍSICA 1er AÑO DIVERSIFICADO

Ediciones CO-BO

FÍSICA 4to Año de Bachillerato

Diseño de Portada: Júpiter Figuera Yibirín

Composición de Textos y Diagramación:

Juan Guerrero y Júpiter Figuera Yibirín.

Dibujos y Figuras:

Júpiter Figuera Yibirín, Ramón Vivas, Carlos Alfonzo, Carlos Alfonzo Suárez

Impreso en Venezuela

Printed in Venezuela



Agradecimientos

Tenemos que mencionar con especial deferencia, admiración y agradecimiento al Prof. Carlos Lezama, ejemplo de humildad y cultura, quien tuvo a cargo la importante tarea de señalarnos los entuertos que del idioma Castellano teníamos en nuestra versión original. Los amigos Ramón Vivas, Carlos Alfonzo (Padre e hijo) se encargaron de interpretar nuestros confusos garabatos y transformarlos en agradables dibujos, tanto en las versiones manuales como en las digitalizadas. Celeste, a pesar de su corta edad, nos ayudó en la corrección de la obra. Agradecemos a la prof. Vilma Velásquez su colaboración en la revisión del texto.

Dedicatoria

A mi amigo y hermano, Juan Guerrero, coautor de esta obra, a quien la vida estudiantil me permitió conocer en un tiempo de ilusiones compartidas y en cuya razón de ser, siempre he encontrado la expresión bondadosa de un ser maravilloso.

A Brisita, terremoto portátil, a Celeste, mi lucerito bello, y a Karlene, prólogo de un libro de la vida.
(Júpiter Figuera)

A mi entrañable y sincero amigo, Júpiter Figuera, condiscípulo del aula de la Universidad y de la vida, maestro del pensamiento, de la pluma y del arte e inspirador insigne de mi participación en la elaboración de esta obra.

A Alba, mi compañera del día a día, por toda la vida, quien estaba siempre alerta para traerme al carril de la escritura cuando, sin darme cuenta, me extraviaba en otros caminos menos importantes.

A mis hijos y a las personas, cuya amistad he compartido sin condiciones.
(Juan Guerrero)



PREFACIO

El programa oficial establecido para el estudio de la Física del Primer Año del Ciclo Diversificado viene estructurado en unidades interdependientes de estudio, cada una de las cuales trata áreas fundamentales, en secuencia lógica y de acuerdo a un programa específico.

Se inicia este texto con los conocimientos básicos comunes para todos los tópicos del programa, como son los conceptos de *observador y marco de referencia, el espacio y el tiempo, sistemas de unidades y órdenes de magnitud, medición de la longitud y el tiempo, escalas del universo: el macromundo y el micromundo*. Con el fin de transmitir estos conocimientos básicos, se establece que el estudio de la Física se debe iniciar considerando, en primer lugar, al *Universo Físico*, con la idea central que el alumno se sitúe como observador en su mundo y adquiera, desde éste, las ideas de *espacio y tiempo*, para luego extenderlas al *super micromundo* y al *super macromundo*. Asimismo, se pretende generar en el estudiante la necesidad de establecer escalas para representar el Universo y lograr el lenguaje específico y matemático para describir el *Universo Físico* mediante *teorías, principios, modelos y conceptos*.

Luego, nos ocupamos del estudio del *movimiento*, que se inicia con la necesidad de fijar un *sistema de referencia*. Se define el concepto de *trayectoria* y su dependencia con el observador (*sistema de referencia*) y se hace la diferencia entre rotación y traslación de un cuerpo rígido. Se introduce el concepto de *partícula* como medio para facilitar el estudio de la realidad física. A continuación, se definen conceptos fundamentales como: *posición, desplazamiento, velocidad y aceleración*, para el análisis cinemático de un movimiento en el marco tridimensional y haciendo uso de los vectores en forma analítica. El estudio del movimiento se presenta de forma que el alumno pueda manejar recursos intuitivos, no matemáticos, sobre los fenómenos físicos del movimiento, basándose en la cotidianidad y experiencia inmediata, para luego relacionarlo con los parámetros fundamentales del movimiento: *posición, desplazamiento, velocidad y aceleración*, que permiten describir el movimiento en 3 dimensiones; se estudian el *movimiento rectilíneo* y el *movimiento parabólico*. El movimiento circular y armónico se estudian como casos particulares. El capítulo 9 estudia las *interacciones*. La fuerza se introduce como una medida de las mismas. Posteriormente, se relaciona con el movimiento para estudiar las *Leyes de Newton* y el *Principio de Conservación del momento lineal*.

El capítulo 14 se refiere al tema de la *energía*. Se inicia observando los valores de la energía en los diferentes rangos de la escala dimensional, relacionándolos con las interacciones que allí se dan. Se establece el análisis cualitativo, de forma intuitiva, en cuanto a las transformaciones y transferencia de energía y, a la luz del significado del concepto de energía en la sociedad, se discuten los términos *crisis energética* y *consumo de energía*. Se analiza la importancia de la energía en la productividad y desarrollo de los países. Se define el *trabajo*, enfatizando su relación con la transferencia de la energía. Se definen, también, la *energía cinética* y la *energía potencial* y se analizan los *choques elásticos e inelásticos*. Se relacionan los conceptos anteriores con el *principio de conservación de la energía mecánica* y el de la *conservación de la energía*.

Como hemos dicho antes, tenemos como norte presentar los conocimientos de la Física en forma amigable, en la medida de lo posible. Esto supone un esfuerzo por describir, en primer lugar en forma conceptual, los fenómenos objetos de esta ciencia, utilizando referencias de la vida cotidiana, de tal manera que podamos entender el *significado físico* de los temas tratados, con antelación a la aplicación de fórmulas matemáticas, necesarias para medir y cuantificar los hechos, desde el punto de vista de la Física.

Ha sido nuestro propósito exponer los conocimientos de la Física dentro de los lineamientos, alcances y objetivos del programa establecido por el Ministerio de Educación, en forma clara, precisa y lógica, con la idea central de hacer que el estudiante logre realmente abordar, con mucho entusiasmo intelectual, el estudio de esta fascinante e importante rama del conocimiento humano.

Júpiter Figuera Yibirín

Juan Andrés Guerrero

Cumaná, enero 2012



Contenido

1 La Ciencia: su lenguaje y su método

1.1	La ciencia.....	1
1.2	El lenguaje fundamental de la ciencia.....	2
1.3	Método de trabajo de la ciencia	2
1.4	La ciencia y la tecnología	3
1.5	La ciencia y el arte	4
1.6	La ciencia y la religión	4

2 Teorías, principios, modelos y conceptos en la Física

2.1	El lenguaje descriptivo y el lenguaje especializado	6
2.2	El observador. Marco de referencia	7
2.3	El movimiento es relativo.....	8
2.4	Sistemas de coordenadas.....	9
2.5	Sistema de coordenadas unidimensional.....	10
2.6	Sistema de coordenadas bidimensional.....	11
2.7	Conceptos básicos de Trigonometría.....	12
2.8	Sistema de coordenadas polares planas.....	16
2.9	Herramientas conceptuales de observación: espacio y tiempo.....	19
2.10	Medición de la longitud y del tiempo.....	20

3 Escalas del Universo Físico

3.1	El universo físico	26
3.2	Escala humana: la longitud.....	26
3.3	Escalas del macromundo.....	27
3.4	Escalas del micromundo.....	28
3.5	Los 4 tipos de fuerza en la naturaleza.....	29

3.6	Escalas ascendentes del tiempo.....	30
3.7	Escalas descendentes del tiempo.....	30
3.8	El lenguaje matemático como medio de comunicación en la Física	32
3.9	El concepto de función. Constantes y variables.....	33
3.10	Fórmulas en Física.....	33
3.11	Estructuración del conocimiento de la Física: teorías, principios, modelos y conceptos.....	35

4 El movimiento

4.1	El movimiento.....	41
4.2	Sistemas de referencia.....	42
4.3	Sistemas de coordenadas.....	43
4.4	Movimientos complejos. Cuerpos rígidos.....	45
4.5	Definición de partícula.....	46
4.6	Trayectoria.....	47
4.7	Algo sobre vectores.....	49
4.8	Representación de un vector.....	50
4.9	Operaciones con vectores: método gráfico.....	51
4.10	Operaciones con vectores: método analítico.....	52
4.11	Vectores unitarios. Forma polar de un vector.....	53
4.12	Vector de posición.....	55
4.13	Vector desplazamiento.....	55
4.14	Rapidez media. Velocidad media.....	58
4.15	Velocidad instantánea.....	63
4.16	Aceleración.....	63
4.17	Aceleración media.....	64
4.18	Representación gráfica de la aceleración media de una partícula en un espacio unidimensional.....	67
4.19	Aceleración instantánea..	68



5 Movimiento rectilíneo

- 5.1 Movimiento rectilíneo a velocidad constante..... 73
- 5.2 Gráfica de la velocidad constante..... 74
- 5.3 Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado..... 75
- 5.4 Gráfica de la aceleración constante..... 75
- 5.5 Velocidad media en el movimiento con aceleración constante..... 77
- 5.6 Movimiento de los cuerpos que caen libremente..... 86

6 Movimiento parabólico

- 6.1 Movimiento parabólico..... 90
- 6.2 Lanzamiento horizontal..... 91
- 6.3 Lanzamiento inclinado de proyectiles..... 93
- 6.4 Altura máxima, tiempo de vuelo y alcance de un proyectil..... 95

7 Movimiento circular

- 7.1 Movimiento circular..... 103
- 7.2 Movimiento circular uniforme.... 103
- 7.3 Rapidez angular.....105
- 7.4 Aceleración angular.....106
- 7.5 Velocidad angular.....108
- 7.6 Velocidad tangencial.....108
- 7.7 Aceleración centrípeta y aceleración tangencial.....110

8 Movimiento armónico simple

- 8.1 Movimiento armónico simple.....117
- 8.2 Desplazamiento en el movimiento armónico simple..... 118
- 8.3 Movimiento armónico simple: velocidad.....119
- 8.4 Movimiento armónico simple: aceleración..... 120

9 Las interacciones en Física

- 9.1 Sistemas físicos. Interacciones.....125
- 9.2 La fuerza como medida de las interacciones..... 127
- 9.3 El carácter vectorial de la fuerza..128
- 9.4 Fuerzas: composición y descomposición.....129
- 9.5 Clases de fuerzas..... 138
- 9.6 Fuerzas de contacto..... 139
- 9.7 Tipos de fuerzas de fricción.....142

10 Interacciones gravitacionales y electromagnéticas

- 10.1 Ley de la Gravitación Universal 150
- 10.2 Ley de Coulomb.....151
- 10.3 Magnetismo y fuerzas magnéticas..... 154

11 Las leyes de Newton y sus aplicaciones

- 11.1 Tercera Ley de Newton: acción y reacción.....160
- 11.2 Primera Ley de Newton: Ley de la Inercia.....163
- 11.3 Masa inercial. Unidad de masa... 165
- 11.4 Segunda Ley de Newton..... 166
- 11.5 El peso de los cuerpos.....167
- 11.6 Masa inercial y masa gravitacional.....170
- 11.7 Peso e ingravidez aparente..... 171
- 11.8 Diagrama de cuerpo libre 172
- 11.9 Marcos de referencia inerciales y no inerciales.....177

12 El equilibrio de los cuerpos

- 12.1 Condiciones de equilibrio.....187
- 12.2 Momento de torsión. Equilibrio rotacional..... 189

13 Cantidad de movimiento

13.1	Cantidad de movimiento.....	196
13.2	Impulso.....	197
13.3	Conservación de la cantidad de movimiento.....	198
13.4	Fuerzas externas e internas a un sistema	199
13.5	Colisiones en sistemas aislados.....	200

14 Trabajo y energía

14.1	El concepto de energía. Tipos de energía.....	205
14.2	Energía y desarrollo económico...	207
14.3	Energía y trabajo.....	207
14.4	Trabajo.....	208
14.5	Trabajo positivo y trabajo negativo	210
14.6	Trabajo realizado por la fuerza de gravedad.....	210
14.7	Representación gráfica del trabajo.....	211
14.8	Trabajo realizado por una fuerza variable.....	213
14.9	Energía cinética.....	214
14.10	Potencia.....	216
14.11	Energía potencial gravitatoria	217
14.12	Energía potencial elástica	219
14.13	Energía mecánica.....	220
14.14	Fuerzas conservativas.....	222
14.15	Fuerzas no conservativas.....	223
14.16	Conservación de la energía mecánica total.....	224
14.17	Energía mecánica y fuerzas no conservativas.....	225
14.18	Energía: principio de conservación.....	227
	Bibliografía.....	234
	Respuestas a los problemas.....	235



CAPÍTULO 1

La Ciencia: su Lenguaje y su Método

1.1 LA CIENCIA

El hombre, desde que apareció sobre la faz de la Tierra, nació ya con una inteligencia innata, con capacidad para razonar y a la vez con capacidad para emitir juicios de conocimiento inmediato, sin el concurso de la razón; es decir, juicios intuitivos o juicios con rasgos adivinatorios. Estas características le permitieron, entre otras cosas, hacer preguntas, interpretar de alguna manera cómo funcionan las cosas que le rodean y adquirir por intuición conceptos como el tiempo, el espacio. Con el correr de los tiempos, fue recopilando conocimientos e ideas, en forma cada vez más creciente, sobre el entendimiento de las cosas existentes; valga decir, por ejemplo, cómo funcionan los ciclos de las estaciones atmosféricas, cómo está constituido el sistema solar, el funcionamiento de los organismos vivos, la composición química del agua y así sucesivamente. A este conjunto de conocimientos e ideas se le denominó *ciencia*, palabra derivada del Latín, que significa *saber*.

El concepto moderno de la ciencia es que la misma trata de explicar los hechos de la naturaleza, tales como son en la realidad, independientemente de valores emocionales y/o comerciales. Este criterio es el mismo que ya sostuvieron los antiguos sabios y filósofos griegos, Demócrito y Aristóteles, al igual que el poeta latino Tito Lucrecio Caro (99-55 a.c.), autor del poema “De la naturaleza de las cosas”, quienes veían el objetivo de la ciencia no en la

obtención de aplicaciones prácticas, pues se avergonzaban de ellas, sino en alcanzar, mediante del estudio de las cosas existentes, el sentimiento de la armonía del mundo.

La ciencia, como actividad humana, tiene ciertas características que la distinguen de las demás actividades del hombre. La ciencia es *analítica*; es decir, se desarrolla de lo particular a lo general. Estudia siempre, en primer lugar, aquellas cosas más inmediatas que ocurren en forma repetitiva y, luego, va concatenando los conocimientos sobre las diversas partes y sus interrelaciones. Por ejemplo, la ciencia no se planteó nunca, en sus inicios, cómo era el Universo en su conjunto, sino que fue investigando sus partes más asequibles: primero, el movimiento de la Tierra y del Sol; luego, el movimiento conjunto de los planetas del sistema solar, para pasar, después, al conocimiento de nuestra galaxia, la “Vía Láctea”, y así hasta, finalmente, intentar su aproximación al conocimiento del Universo, aproximación que, al presente, tiene logros extraordinarios.

Es bueno saber que, debido al incesante movimiento de las cosas existentes, el conocimiento de las mismas es inagotable; es decir, no tiene un horizonte final, sino que el mismo crece en forma asintótica, acercándose cada vez más a la esencia de la realidad, pero sin poder tocarla en forma definitiva. Lo que hoy parece definitivo, mañana no lo será, pues todo cambia en forma continua y este cambio es siempre algo nuevo para el intelecto humano.

La ciencia, por otra parte, es un conocimiento especializado, sin contradicciones, en contraposición al conocimiento corriente de las personas, el cual es, con frecuencia, inexacto y poco preciso. La ciencia es metódica y abierta, sus resultados son verificables, con capacidad para predecir fenómenos mediante sus propias leyes. Finalmente, la ciencia se caracteriza por ser beneficiosa (aunque no es su objetivo), ya que al descubrir y establecer el conocimiento sobre los hechos de la naturaleza, el hombre puede sacar provecho al aplicar tecnologías adecuadas para la producción de cosas útiles.

1.2 EL LENGUAJE FUNDAMENTAL DE LA CIENCIA

El lenguaje fundamental de la ciencia es la Matemática. En esto existe un reconocimiento universal, ya que desde los albores del siglo XVI, cuando se descubrió que el mundo material podía ser analizado haciendo uso de la Matemática, la ciencia inició un acelerado desarrollo hasta llegar a los esplendores actuales. Sobre la base de esta realidad, la Matemática es la forma de expresión de los hechos científicos y el modo universal de comunicarse entre sí las personas que hacen ciencia, especialmente en las ramas dedicadas al estudio de los seres inanimados, como son la Geología, la Astronomía, la Química y la Física, aunque las ciencias de la vida como la Biología, la Zoología y la Botánica también utilizan, con profusión y utilidad, el lenguaje matemático. El siguiente ejemplo se menciona, simplemente, para ilustrar cómo la Matemática es indispensable para describir hechos científicos. La segunda ley de Kepler, descubierta por el astrónomo alemán Johannes Kepler, quien vivió de 1571 a 1630, establece, como se muestra en la fig. 1.1, que los planetas se mueven alrededor del Sol de tal forma que, si en un momento dado, unimos con una línea imaginaria el centro del Sol con el centro de un planeta y, 3 días más tarde, volvemos a dibujar esta línea, resulta que el área barrida por el recorrido de esta línea y el movimiento del planeta será idénticamente igual al área barrida por esta cuerda y el planeta en cualesquiera otros 3 días del recorrido. Este hecho puede ser explicado con muchos detalles; pero no es posible explicar por qué estas áreas son idénticas, sin recurrir a la Matemática, bien sea a la geometría o al cálculo.



En su concepción moderna, la ciencia trata de explicar los hechos de la naturaleza tales como son.

1.3 MÉTODO DE TRABAJO DE LA CIENCIA

El método de trabajo de la ciencia es el llamado *método científico* y el mismo se entiende como un conjunto definido de actividades realizadas por las personas que se dedican profesionalmente a la ciencia, para lograr conocimientos racionales sobre las cosas existentes. Se considera que el método científico fue formulado, por primera vez, por Roger Bacon, filósofo inglés de la edad media (1220-1292); sin embargo, se da por sentado que el método científico arranca formalmente con Galileo Galilei e Isaac Newton. Galileo, físico, matemático, astrónomo y escritor italiano (1564-1642) es considerado el padre de la Física experimental y a Newton, físico, matemático y astrónomo inglés (1643-1727) se le reconoce como el creador de la Física teórica.

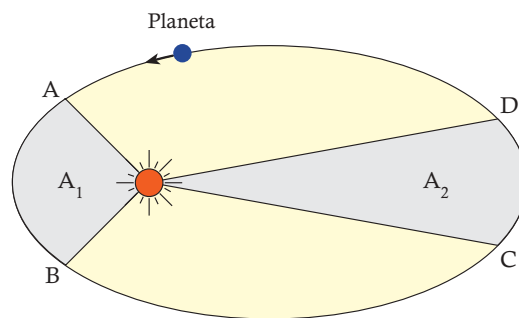


Fig. 1.1 El área A_1 barrida por la línea imaginaria que une al centro del Sol con el centro del planeta, cuando el mismo se desplaza del punto A al punto B es igual al área A_2 barrida cuando el planeta se desplaza en el mismo tiempo del punto C al punto D. La igualdad de estas áreas sólo se puede demostrar usando la geometría o el cálculo.

Lo esencial del método científico consiste en que su utilización puede conducir al conocimiento de las cosas. Estos conocimientos se pueden comprobar una y otra vez, se pueden guardar y, finalmente, pueden darse a conocer a otras personas.



La aplicación del método científico conlleva, en general, la aplicación de los siguientes pasos:

- a. Identificar la existencia de un fenómeno que se repite.
- b. Enumerar la mayor información posible sobre hechos que puedan incidir sobre el fenómeno.
- c. Formular una suposición o hipótesis de explicación del fenómeno, utilizando como ayuda el conocimiento existente, si hay alguno disponible.
- d. Traducir, de ser posible, al lenguaje matemático la explicación del fenómeno, en su totalidad o en sus partes.
- e. Describir las predicciones sobre la suposición de explicación del fenómeno.
- f. Planificar los medios para llevar a cabo las pruebas sobre las predicciones.
- g. Analizar los resultados de las pruebas, a la luz de las predicciones establecidas. Si los resultados corroboran las predicciones, la suposición de explicación queda confirmada, adquiriendo el carácter de una teoría o una ley.

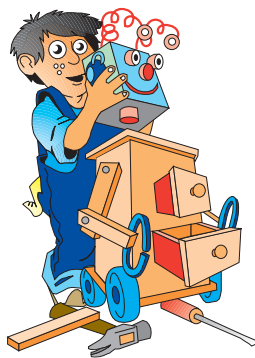
Generalmente, en la práctica, no se cumplen estos pasos en ese orden y ni siquiera se cumplen en su totalidad. Muchos descubrimientos en la historia de la ciencia se han realizado aplicando solamente el método del ensayo y error y otros por pura casualidad, como es el caso del descubrimiento de

los rayos X y de la radiactividad. Igualmente, pesan mucho en los descubrimientos científicos la intuición, la curiosidad, la preparación y el conocimiento general y profundo en torno a la ciencia sobre la cual se hacen las investigaciones.

1.4 LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

Ciencia y tecnología son conceptos diferentes, pero estrechamente relacionados. La tecnología, como su nombre lo indica, tiene como propósito estudiar las técnicas y los procesos a aplicar en la industria, cualquiera que sea su naturaleza y complejidad. Debemos entender por técnica, en este contexto, al conjunto de los conocimientos, procedimientos y métodos requeridos para la producción de un bien, dirigido al consumo o uso por la población.

En otros términos, la tecnología se dedica a tratar los problemas prácticos bajo una óptica científica, a diferencia de la ciencia, la cual se dedica a la búsqueda de leyes que expliquen cómo se suceden y se comportan los fenómenos naturales. La ciencia y la tecnología conforman dos categorías que marchan en forma paralela. La tecnología, al dar respuesta a nuevos avances en la solución de problemas técnicos planteados por la industria, obliga automáticamente a la ciencia a crear nuevas teorías o nuevas leyes para explicar los fenómenos naturales.



La ciencia y la tecnología son conceptos que se conjugan, de forma que el desarrollo de una implica el reforzamiento de la otra.

Es importante destacar que la tecnología puede ser culpable de efectos perniciosos para un sano desarrollo de los seres vivos. Por ejemplo, la utilización de plantas de energía atómica para la producción de electricidad, ha demostrado la peligrosidad de estas instalaciones en los accidentes ocurridos en los países donde aquellas operan. Igualmente dañina es la contaminación atmosférica debida a los

residuos tóxicos generados por los vehículos automotores. Mención importante merece la destrucción de la capa de ozono (que nos protege de la acción maligna de los rayos ultravioleta, al actuar como un filtro contra tales rayos), por el uso de productos de fluorocarbonos, como los conocidos aerosoles utilizados en cosmética y medicina para pulverizar, dentro de un gas confinado en recipientes manuales, sustancias de uso cotidiano. Como los efectos perjudiciales de la tecnología nos afectan a todos, es muy importante que nos percatemos de la importancia de tener información general sobre sus productos, con el objeto de oponernos a su fabricación, cuando los mismos puedan perjudicar al medio ambiente, al planeta y, por consiguiente, a los seres vivos que poblamos la Tierra.

1.5 LA CIENCIA Y EL ARTE

La ciencia, como se ha explicado antes, se dedica al estudio racional de las cosas; es decir, persigue la interpretación y explicación de los hechos, sin preocuparse de utilidades prácticas, como lo hace la tecnología, que busca la producción de cosas de utilidad con fines lucrativos. En el estudio de las cosas (la luz, el movimiento en general de los objetos, las leyes que rigen el movimiento de los astros, el átomo, las partículas constitutivas del átomo como el electrón y el protón, el crecimiento de las plantas) la ciencia anda en la búsqueda de establecer ordenamientos de hechos repetitivos que ocurren dentro del aparente caos en todo lo que nos rodea. Esos ordenamientos se plasman a través de teorías y leyes verificables. El arte es la interpretación de la realidad sin razonamientos lógicos, ya que no puede estar sometido, como los hechos de la ciencia, a pruebas rigurosas, sino a la contemplación directa de las imágenes. La ciencia siempre podrá explicar

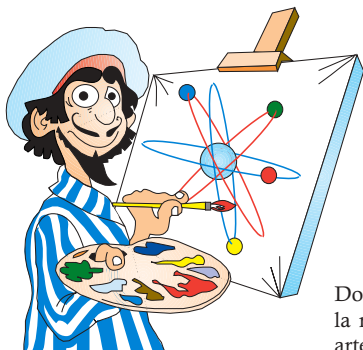
la validez de una teoría o una fórmula; en cambio, el arte, con sus creaciones, sólo permite estimular nuestros sentidos, para sentir con diversa intensidad el encanto de una obra musical, una poesía o la pintura en un lienzo.

En el proceso de conocimiento del mundo que nos rodea, la ciencia y el arte se complementan. En la ciencia predomina la actitud del análisis de los hechos de la naturaleza, como hemos referido en otra parte. En el arte predomina la síntesis; esto es, de la inmensa variedad de imágenes de la naturaleza, el artista escoge aquellas que le permiten crear la armonía del conjunto que está creando. El verdadero arte existe al lado de la ciencia, así como el logro de los descubrimientos más relevantes de la ciencia caen dentro del mundo del arte. El científico, con su formación, experiencia e inteligencia, estará en capacidad de producir profundos hallazgos de fórmulas y leyes de hechos de la naturaleza, fuera del ámbito riguroso del método científico, lo que quiere decir que esas creaciones tienen lugar sin duda dentro del ámbito de la inspiración artística. En esta visión se inscribe la afirmación de Albert Einstein acerca de que las nuevas ideas de la ciencia, como por ejemplo la creación de teorías, no son hechos producto directo de la razón, sino que son creaciones libres de la mente humana, en forma similar a los actos creativos de las artes visuales, literarias, escénicas, auditivas y audiovisuales.

1.6 LA CIENCIA Y LA RELIGIÓN

Al hombre, desde su aparición en este mundo, siempre le ha preocupado cuestiones como el significado de la vida y la muerte, el bien y el mal, la inmortalidad, Dios, el destino final del ser humano. La religión, cualquiera que ella sea, se ha ocupado, a lo largo de su historia, de tratar de dar respuestas, de alguna manera, a estos planteamientos.

La ciencia no tiene dentro de sus objetivos dar respuestas científicas a los planteamientos mencionados. Su cometido es menos ambicioso, puesto que enfoca su actividad al conocimiento sólo de aquellos fenómenos que pueden ser evaluados en sus propiedades mediante la Matemática. Esto, sin embargo, no puede inducir a pensar que fenómenos como el hipnotismo, la telepatía y muchos otros, los cuales, aunque aún no pueden ser descritos científicamente

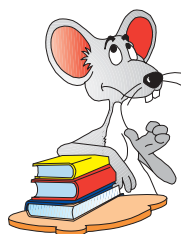


Dos caminos de visualizar la naturaleza: a través del arte o de la ciencia.

mediante números y fórmulas, tengan que ser negados, ya que su existencia es incuestionable. El hecho de que la ciencia no tenga respuestas para todas las cosas de la vida, nos indica, simplemente, que el mundo, en su totalidad, es más complejo y rico de posibilidades que el cuadro que nos muestra la ciencia. Para alegría y esperanza de los jóvenes que se inician en el aprendizaje y desarrollo de la ciencia, el conocimiento científico no está acabado, pues el mismo marcha en forma asintótica, debido al carácter permanentemente cambiante de la realidad.



La ciencia y la religión tratan de explicar al mundo de manera distinta. El científico es libre de adoptar posiciones religiosas, mientras que la religión convive con los hechos de la ciencia.



PIENSA Y EXPLICA



- 1.1 ¿Cuál es el concepto de ciencia?
- 1.2 ¿Por qué la ciencia es analítica?
- 1.3 ¿Es el conocimiento inagotable?
- 1.4 Se habla de la ciencia como un conocimiento especializado. ¿Por qué?
- 1.5 ¿Por qué se dice que la Matemática es el lenguaje fundamental de la ciencia?
- 1.6 ¿Qué es el método científico? ¿Cuáles son sus pasos?
- 1.7 ¿Es el método científico el único instrumento utilizado para hacer avances en la ciencia? Explica.
- 1.8 ¿Cuál es la diferencia entre ciencia y tecnología?
- 1.9 ¿Por qué se dice que ciencia y tecnología marchan en forma paralela?
- 1.10 A la tecnología se le atribuyen efectos perniciosos. ¿Por qué? Cita ejemplos.
- 1.11 ¿En qué se diferencian la ciencia y el arte en su interpretación de la naturaleza?

- 1.12 Einstein afirmó que las nuevas ideas de la ciencia no son producto directo de la razón, sino que son creaciones libres del hombre. Comenta esta afirmación. ¿Qué tiene esto que ver con el arte?
- 1.13 Así como se habla de una inspiración artística, ¿se puede hablar de una inspiración científica?
- 1.14 ¿Es la concepción científica contrapuesta a la concepción religiosa? Explica.
- 1.15 ¿Cómo se compara el lenguaje de la ciencia con el lenguaje de la religión?
- 1.16 ¿Tienen puntos de coincidencia las concepciones científica y religiosa?
- 1.17 ¿Debería un científico profesar una religión? ¿Podría esto contradecir sus hallazgos en el campo de la ciencia? ¿Cómo podría resolver esas contradicciones?
- 1.18 Un científico que profese una religión, ¿podría entrar en contradicciones con los hechos de la realidad? ¿Cómo podría resolver esas contradicciones?

CAPÍTULO 2

Teorías, Principios, Modelos y Conceptos en la Física



2.1 EL LENGUAJE DESCRIPTIVO Y EL LENGUAJE ESPECIALIZADO

En la vida cotidiana, utilizamos un lenguaje común que normalmente todos entendemos sin ninguna profundidad ni conocimientos especiales; es el lenguaje que aprendimos desde niños y que, luego, hemos enriquecido con nuestra experiencia y estudios. Con este lenguaje común, nos podemos pasar por la vida y nos sirve, por supuesto, para comunicarnos y hacernos entender por nuestros semejantes. Con este lenguaje, bien sea escrito o hablado, podemos describir cosas cotidianas, como la caída de la lluvia en una tarde de nuestra época de invierno o un concierto musical. Sin embargo, descripciones de un mismo evento, realizadas por personas diferentes, no son nunca idénticas, ya que todo depende del punto de vista de cada persona y del grado de conocimientos de esa persona sobre el evento por describir.

Por otra parte, para la descripción de cosas que no son cotidianas, como un juego de fútbol, se requiere conocer términos especializados aplicados a esta actividad, y si queremos profundizar sobre el conocimiento de las reglas sobre las cuales se realiza esta disciplina deportiva, o bien sobre las normas de construcción de una cancha o de un campo de fútbol, el lenguaje deberá ser cada vez más especializado.

Ahora bien, cuando entramos al mundo de la ciencia el lenguaje utilizado está compuesto por términos de uso cotidiano y por otros que, aun cuando son de uso cotidiano, con varios e imprecisos significados

en la vida diaria, se les asigna una definición precisa y ajustada al carácter científico de la disciplina que se trate. Tomemos por ejemplo el caso del agua, la cual, estudiada desde el punto de vista de la Química, tendrá una descripción totalmente diferente cuando la misma es tratada desde el punto de vista de la Biología o de la Física. Si se trata de su análisis químico, se describirá como una sustancia formada por oxígeno e hidrógeno, combinados químicamente en la proporción de 1 volumen de oxígeno por 2 de hidrógeno; se informará que es un líquido inodoro, insípido, incoloro en pequeñas cantidades, pero verdoso en cantidades muy grandes, como se puede ver en los mares y océanos. Desde el punto de vista de la Biología se nos informará, entre otras cosas, que el agua es el componente más abundante e importante de los seres vivos. Lo anterior nos indica que cada rama de la ciencia tiene su propio vocabulario y que debemos aprender a usarlo con propiedad para poder entender con precisión y, libre de confusiones o de apreciaciones personales, las descripciones de las cosas de la naturaleza.

En lo que se refiere a la Física, esta ciencia tiene su terminología bien definida y es necesario entender, sin ninguna duda, las definiciones de sus términos, con el fin de poder comprender claramente las descripciones y alcances de los fenómenos naturales, objetos del estudio de esta ciencia. Sin entrar en detalles, podemos mencionar, como ejemplo, el término *trabajo*, que tiene una definición precisa en la Física, la cual es bien diferente a la misma palabra usada en el lenguaje corriente. Todos, en algún

momento, hemos dicho u oído expresiones como la siguiente: "me ha costado mucho trabajo graduarme de médico". La palabra trabajo, empleada en esta oración, no tiene ninguna relación con el concepto de trabajo en la Física, ya que en esta ciencia el trabajo tiene una definición precisa y única: *trabajo es el producto del valor de una fuerza constante o la componente de una fuerza constante aplicada a un cuerpo, por el desplazamiento de ese cuerpo en la dirección de la fuerza o de su componente*. Otros términos como gravedad, fuerza, densidad, volumen, etc., con diversos significados en el lenguaje cotidiano, tienen una definición única en el lenguaje de la Física.



Al contrario del lenguaje cotidiano, la Física utiliza un lenguaje especializado, necesario para explicar los fenómenos observados.

2.2 EL OBSERVADOR. MARCO DE REFERENCIA.

Desde un punto de vista formal, *observador es cualquier persona con capacidad para examinar con atención cualquier cosa*. Desde el punto de vista de la Física, un observador es alguien que describe un *fenómeno físico*, bien sea el vuelo de un avión o los movimientos de la Tierra, tomando en cuenta, como requisito esencial, la necesidad de identificar la *posición espacial o punto* donde se encuentra el observador que describe el fenómeno. Este punto, donde se encuentra el observador, se conoce en la Física como «*marco de referencia*» o «*sistema de referencia*».

llegar a *la plaza*, donde conseguirás el sitio buscado, al lado del *hotel*. Los puntos como *la esquina*, el *centro comercial*, *la plaza* y el *hotel* que son *inmóviles durante el recorrido*, son *marcos de referencia* o *sistemas de referencia*, los cuales le permiten a la persona llegar al sitio deseado.



El marco de referencia o sistema de referencia es un punto inmóvil, desde el cual se puede describir la posición y el movimiento de cualquier cuerpo en el espacio.

El sistema de referencia puede ser cualquier punto del espacio; éste tiene que ser definido por el observador. En la vida diaria usamos, con alguna frecuencia y de la forma más natural, sin percatarnos, sistemas de referencia. Un caso común ocurre cuando alguien nos pregunta una dirección y respondemos de la siguiente manera: en *la esquina* cruza a la derecha, al llegar al *centro comercial* camina una cuadra y, luego, gira hacia la izquierda hasta



Desde el punto de vista de la Física, un observador es una persona que puede describir un fenómeno físico.

Tomemos otros ejemplos para reafirmar el concepto. Sea el caso de un pasajero que sube a un avión para un viaje de Maiquetía a Maracaibo. Luego que el avión ha alcanzado la velocidad normal que tendrá durante ese vuelo, si el pasajero se sienta en el lado de la ventanilla y la mantiene cerrada, de tal manera que no pueda ver nada hacia el exterior del avión y si éste mantiene su velocidad uniforme y se desplaza en línea recta, y no se producen turbulencias en el aire que puedan provocar perturbaciones, el pasajero notará que dentro del avión nada se mueve y la sensación que experimenta es que el avión tampoco se mueve. La situación es idéntica si el avión estuviera parado en el aeropuerto. Sin embargo, se sabe que el avión vuela a una velocidad de 1.000 km/h, por ejemplo. Se presenta, entonces, aparentemente una contradicción, pues parece como si el pasajero estuviera a la vez en reposo y en movimiento. Esta aparente contradicción se resuelve si se aplica el concepto de marco de referencia o, la expresión más usada en la Física, *sistema de referencia*. La persona que

dice que nada se mueve ni siente que el avión se mueve, está expresando, sin decirlo directamente que él y las demás personas y cosas que están dentro del avión están en reposo con respecto al avión. Por otra parte, cuando decimos que el avión vuela a la velocidad de 1.000 km/h, se está afirmando, igualmente, sin decirlo directamente, cómo el avión cambia de posición con respecto a la Tierra.



La condición de quién está en reposo y quién está en movimiento, depende del sistema de referencia que se elija como sistema en reposo.

Si se elige el avión como sistema de referencia, el pasajero no se mueve, está siempre en el mismo lugar y tiene todo el derecho de afirmar que el avión no se mueve. Si se elige como sistema de referencia el punto donde se ubica la persona o personas que, desde la Tierra, observan cómo se desplaza el avión, éste se mueve conjuntamente con el pasajero y todo lo que está dentro del mismo. Como se puede ver, para entender correctamente la explicación del movimiento de un cuerpo, es necesario que se elija el sistema de referencia desde el cual se va a describir dicho movimiento. El sistema de referencia, entonces, puede ser un punto fijo (caso, el observador ubicado en la tierra) o bien un punto que se mueve (caso, la persona que vuela en el avión).

Veamos otro ejemplo ilustrativo sobre la necesidad de tener en cuenta el sistema de referencia. Si desde

un avión, el piloto lanza por la ventanilla un proyectil, como se muestra en la fig 2.1, y tomando como punto de referencia el avión, el piloto verá que dicho proyectil cae en línea vertical, pero desde la Tierra un observador verá que el proyectil cae describiendo una trayectoria parabólica. *Ambas descripciones del movimiento del proyectil son correctas, porque cada descripción se ha hecho desde un sistema de referencia diferente.* Así, preguntar cuál es la forma real de la trayectoria del proyectil, no tiene ningún sentido, ya que al observar la trayectoria del proyectil desde distintos sistemas de referencia, veremos diferentes formas de curvas en su movimiento.

Consideremos otro ejemplo. Si desde nuestro asiento en el avión en vuelo, lanzamos una pequeña pelota hacia el techo, veremos que dicha pelota sube y se devuelve en línea recta hacia nosotros. Esto lo apreciamos así porque nosotros, como observadores, vemos el movimiento de la pelota desde nuestro propio sistema de referencia: el avión. Esta apreciación es idéntica a si lanzáramos la pelota estando el avión parado en el aeropuerto; en cambio, *un observador desde la Tierra como punto de referencia, que pudiera mirar el interior del avión, vería el movimiento de la pelota como una trayectoria parabólica.* En la fig. 2.2 se ilustran las situaciones anteriormente descritas.

2.3 EL MOVIMIENTO ES RELATIVO

De los ejemplos que se han presentado para ilustrar el concepto de sistema de referencia, se desprende una conclusión muy importante: *el movimiento es relativo.* Es decir, el movimiento es posible describirlo sólo con relación a un *sistema de referencia.* El térmi-

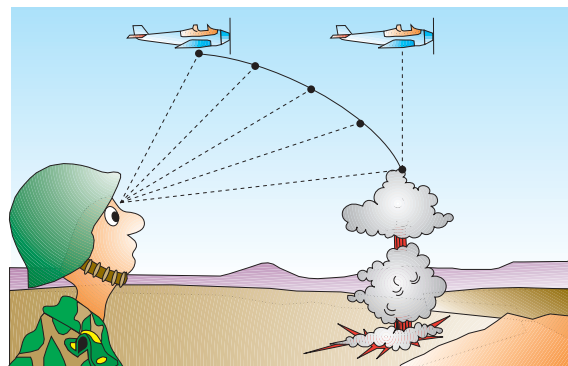
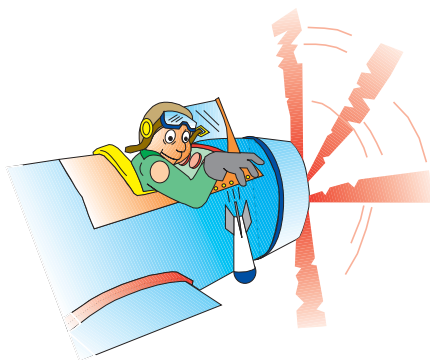


Fig. 2.1 El piloto que lanza un proyectil, desde un avión, lo verá caer en línea recta. En cambio, el observador en la superficie terrestre verá que el proyectil describe una trayectoria parabólica.

Un sistema de referencia, como se ha visto, no es ningún capricho ni formalidad; es algo absolutamente necesario tener en cuenta, para poder explicar y transmitir información correcta sobre el movimiento de los cuerpos.

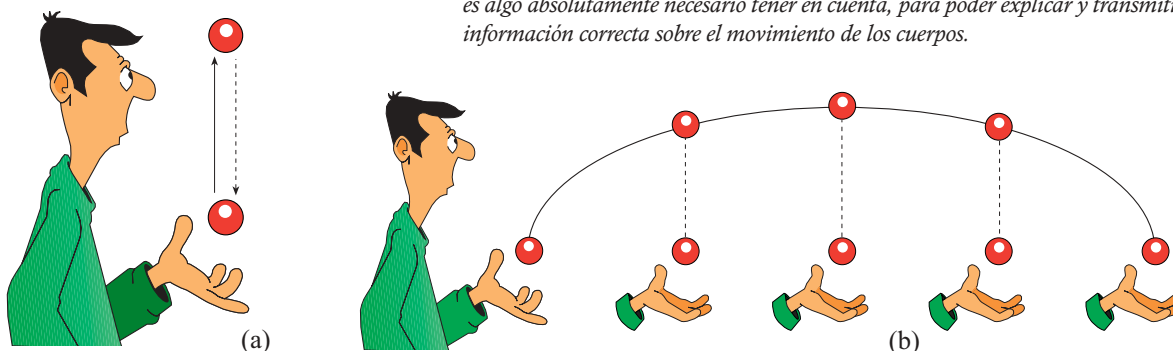


Fig. 2.2 a) Si un pasajero en el interior de un avión lanza una pelota verticalmente hacia arriba, observará que dicha pelota se mueve en línea recta al subir y al bajar. b) Un observador, colocado en la superficie terrestre, verá a la pelota describir una trayectoria parabólica.

no relativo no es ninguna palabra misteriosa; relativo quiere decir que tiene relación con algo, que no es absoluto, que depende de otra cosa. Cuando expresamos, por ejemplo, que un automóvil viaja a 95 km/h, queremos decir que siempre lleva esta velocidad con relación a la carretera como sistema de referencia. La relatividad del movimiento fue descubierta por el físico italiano Galileo Galilei (1564-1642), y ese descubrimiento se tiene como uno de los más grandes en la historia de la Física, ya que el desarrollo de esa ciencia no hubiera sido posible de no haberse realizado tal descubrimiento. Actualmente se le considera como una **Ley Física** y se le denomina **Principio de la Relatividad del Movimiento**. A esta ley se le tiene como la más importante de la naturaleza. Albert Einstein, creador de la *Teoría de la Relatividad*, a principios del siglo XX (1905), profundizó y amplió con ideas originales el principio de la relatividad del movimiento de Galilei, en lo referente a la velocidad de la luz y otros fenómenos relacionados con la electricidad y el magnetis-

mo, creando con ello una verdadera revolución en el cuerpo completo de conceptos de la Física, sobre todo en lo atinente a las ideas sobre el espacio y el tiempo. No debe confundirse el **Principio de la Relatividad del Movimiento**, con la **Teoría de la Relatividad**, ya que esta última teoría se refiere a los conceptos de la relatividad del tiempo, lo cual ha dado lugar, debido a las extraordinarias deducciones que se derivan, a una nueva manera de ver la naturaleza y a una nueva manera de pensar sobre las leyes físicas que rigen nuestro mundo y, en general, al Universo.

2.4 SISTEMAS DE COORDENADAS

Volvamos al concepto de *sistema de referencia*, para introducir el concepto de *sistemas de coordenadas*. La definición de sistema de referencia se ha expresado como el *punto inmóvil al que hay que referirse, cuando se trata de describir la posición y el movimiento de cualquier cuerpo ubicado en un punto del espacio*.



Fue Galileo quien descubrió la relatividad del movimiento. Einstein extendió el concepto de relatividad del movimiento al de la relatividad del tiempo, estableciendo, así, la Teoría de la Relatividad.

En la vida corriente, cualquier persona se podrá dar cuenta que el espacio tiene 3 dimensiones; si tomamos la mano como punto de referencia, podemos ver que existe siempre un arriba, un abajo, una derecha, una izquierda, un adelante y un atrás, lo cual nos permite afirmar, con toda claridad, que *el espacio es un conjunto de puntos abstractos, localizados a partir de un punto de referencia, mediante tres ejes ilimitados en su longitud, a los cuales se les asigna números de posición*. Estos números de posición se denominan *coordenadas*. Digamos, de otra manera, que todo evento o fenómeno físico ocurre en un

punto del espacio, y ese punto del espacio puede ser ubicado con claridad definiendo un punto de referencia y admitiendo, como se ha dicho, que el espacio es tridimensional. De lo anterior se desprende que, para describir con precisión la posición y el movimiento de cualquier cuerpo en el espacio, a partir de un marco de referencia elegido, tenemos que utilizar el concepto de espacio tridimensional y los números de posición o coordenadas. Esto se logra utilizando la herramienta operacional matemática conocida como *sistema de coordenadas*, el cual consiste en 3 ejes de coordenadas perpendiculares entre sí, unidos en un punto común denominado *origen del sistema de coordenadas* como se muestra en la fig. 2.3. Los ejes se identifican siempre con las letras X, Y, Z y, a partir del punto de unión u origen, los ejes pueden tener la longitud que se requiera, sin ninguna limitación, como se ha mencionado antes.

Sobre cada uno de estos ejes, podemos asignar un número o coordenada para ubicar el cuerpo o punto en el espacio, en relación con el punto de origen o marco de referencia. Este conjunto de ejes, dispuesto como se ha descrito, se denomina *sistema de coordenadas cartesianas*, en honor al filósofo, matemático y físico francés René Descartes (1596-1650), quien, además de sus obras filosóficas, en Física enunció las leyes de la refracción y reflexión de la luz y en Matemática fundó la geometría analítica. Este sistema de coordenadas se conoce también como *sistema de coordenadas rectangulares*, ya que los ejes forman ángulos rectos entre sí. Este nombre es el que se usa con más frecuencia. De lo anterior tenemos, entonces, que en la Física el concepto de *marco o sistema de referencia* se asocia usualmente con un sistema de coordenadas cartesianas, aunque pudiera ser otro sistema, como el sistema de coordenadas polares, del cual hablaremos posteriormente. Esta asociación es tan útil que, normalmente, se menciona la frase sistema de coordenadas en lugar de marco o sistema de referencia, cuando se está describiendo un evento o fenómeno físico.

Como existe la posibilidad de que algunos eventos puedan ser descritos no desde el espacio de 3 dimensiones, sino desde un punto en una línea o 2 puntos en un plano, es importante que sepamos distinguir y manejar estos tipos de sistemas de coordenadas.

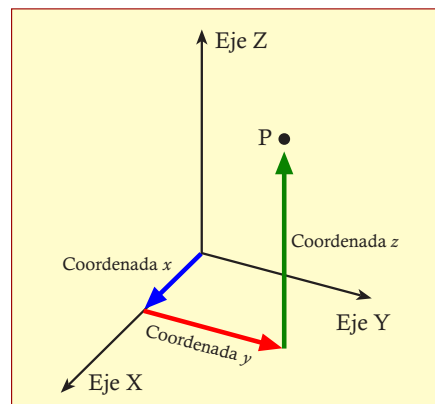


Fig. 2.3 Coordenadas cartesianas o rectangulares. El eje Z es perpendicular al plano formado por los ejes X y Y.

2.5 SISTEMA DE COORDENADAS UNIDIMENSIONAL

Consideremos una línea sobre la cual se ha marcado un punto de origen, al cual se le ha asignado el número cero sobre la misma. Cualquier otro punto, colocado a la derecha del anterior, se dice que tiene una coordenada positiva. Un punto a la izquierda del cero, tendrá una coordenada negativa. En este caso se dice que el sistema de coordenadas es unidimensional o de una sola dimensión, ver fig.2.4.

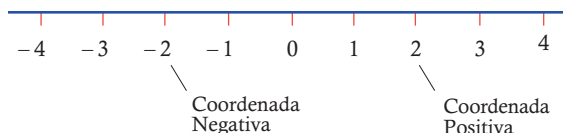


Fig. 2.4 Sistema de coordenadas unidimensional.

Si tenemos, por ejemplo, que realizar un viaje en automóvil desde Puerto La Cruz hasta Caracas, podemos describir el movimiento en un momento dado, identificando nuestra posición después de 2 horas de recorrido; tal vez, en ese tiempo hayamos recorrido 150 km y nos encontremos en el sitio conocido como El Guapo. Este punto, identificado con el número 150 km, es una coordenada positiva, considerando que partimos del punto 0 en el terminal de Puerto La Cruz, sobre la línea imaginaria de nuestro destino: Caracas. Es decir, este punto es una coordenada sobre un sistema de coordenadas unidimensional. Al llegar a Caracas, habremos

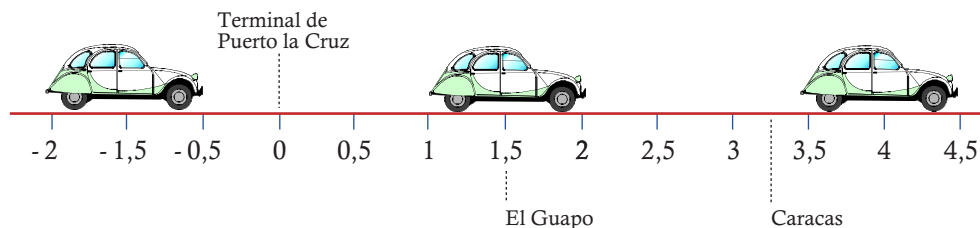


Fig. 2.5 Sistema de coordenadas unidimensional, donde se muestran las posiciones de un vehículo que va desde Puerto La Cruz hasta Caracas, pasando por la población de El Guapo. Los números mostrados indican km y deben ser multiplicados por 100.

recorrido, aproximadamente, 320 km. Este punto es otra coordenada positiva de este sistema unidimensional, tal como se ilustra en la fig. 2.5. Observa, también, que los puntos situados a la izquierda de Puerto La Cruz, pueden asociarse a coordenadas negativas.

2.6 SISTEMA DE COORDENADAS BIDIMENSIONAL

La mayoría de los eventos físicos se describen con sistemas de coordenadas de 2 dimensiones; es decir: la descripción se realiza sobre un plano. Por ser este el caso más frecuente, se da una información más detallada sobre este particular. El sistema de coordenadas en 2 dimensiones está constituido por 2 ejes, el eje X y el eje Y, los cuales se cortan perpendicularmente en el punto 0, conocido como origen del sistema de coordenadas, como se muestra en la fig. 2.6. En esta figura, la línea horizontal se denomina *eje de las X* o *eje de las abscisas* y la línea vertical se denomina *eje de las Y* o *eje de las ordenadas*. Cualquier

punto en el plano XY se designa como $P(x, y)$, donde x y y son las coordenadas del punto. Los ejes, como se puede ver, dividen el plano en 4 partes denominadas *cuadrantes*. En la fig. 2.6 el primer cuadrante se identifica como $Y0X$, el segundo como $Y0X'$, el tercero como $Y'0X'$ y el cuarto cuadrante como el $Y'0X$. Por otra parte, el cero u origen de coordenadas divide a los ejes XX' y YY' en 2 semi-ejes, asignándole al semi-eje $0X$ el signo positivo y al semi-eje $0X'$ el signo negativo. Igualmente, al semi-eje $0Y$ se le asigna el signo positivo y al semi-eje $0Y'$ se le asigna el signo negativo. Así, cualquier longitud que se mida en el eje X a la derecha de 0 será positiva, y cualquier longitud que se mida hacia la izquierda de 0 será negativa. Por razones similares, cualquier longitud que se mida sobre el eje Y hacia arriba de 0 será positiva y cualquier longitud que se mida hacia abajo del cero será negativa. Por otra parte, tenemos que la distancia de un punto al eje de las abscisas se denomina *ordenada* y la distancia de un punto al eje de las ordenadas se llama *abscisa*. Por lo tanto, *las coordenadas cartesianas de un punto serán la abscisa y la ordenada de ese punto*.

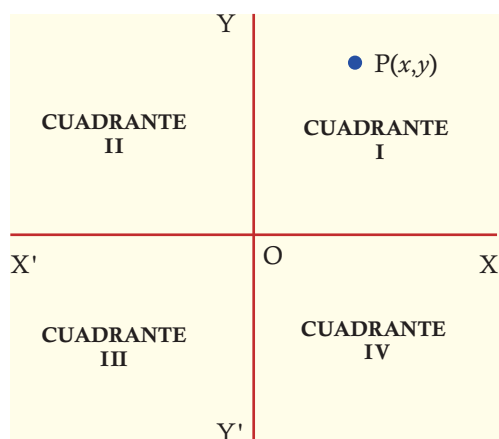


Fig. 2.6 Sistema de coordenadas rectangulares.

Para determinar gráficamente la posición de un cuerpo o punto en un sistema de coordenadas en 2 dimensiones, normalmente se utiliza papel cuadriculado para facilitar la operación del trazado y lograr mayor precisión en las medidas. La fig. 2.7 muestra un conjunto de puntos, con sus respectivas coordenadas.

Ejemplo 2.1

Mediante las figuras apropiadas, ubica los siguientes puntos en un sistema de coordenadas rectangulares:
a) $P_1(-2, 4)$, $P_2(0, -5)$, $P_3(-4, 0)$. **b)** $P_4(2, 3, 5)$. **c)** $P_5(4, -2, 6)$.

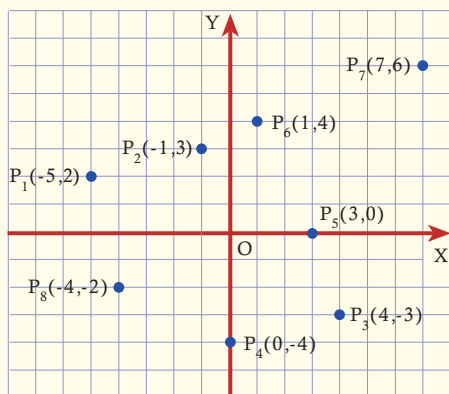


Fig. 2.7 Representación de varios puntos en un sistema de coordenadas rectangulares.

Solución

En la fig. 2.8 se muestran las soluciones en cada caso.

2.7 CONCEPTOS BÁSICOS DE TRIGONOMETRÍA

La palabra trigonometría se origina de los vocablos griegos "trigonon" (triángulo) y "metría" (medida). En ese sentido, trigonometría significa "*medida de triángulos*". Ampliando este significado, diremos que *la trigonometría se ocupa de la relación entre los ángulos de un triángulo y los lados que forman el mismo*. Diversas ramas de la ciencia hacen uso intensivo de las funciones trigonométricas para simplificar el análisis

de los fenómenos observados por el hombre.

En Geometría se estudia que un ángulo es la expresión de un giro efectuado por una semirecta, que se mueve alrededor de un punto, en relación con otra semirecta que permanece fija. Para visualizar el concepto, consideremos la fig. 2.9, donde se muestran dos puntos, O y A, de una semirecta que se extiende indefinidamente. Si hacemos rotar el segmento OA, alrededor del punto O, lo cual es indicado mediante la flecha curvada de la fig. 2.9, obtenemos el ángulo α como expresión de dicha rotación. Al punto O se le conoce como *centro de giro*, mientras que a las posiciones inicial y final de la semirecta se les denomina *lado inicial* y *lado terminal*, respectivamente. Mediante esta rotación, el punto A se transforma en el punto A'.

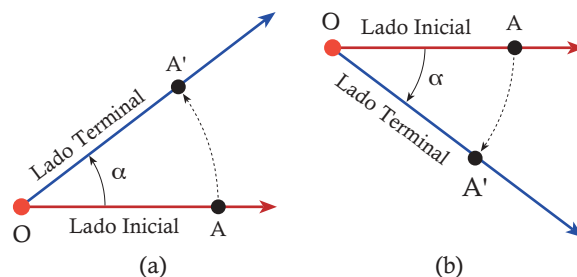
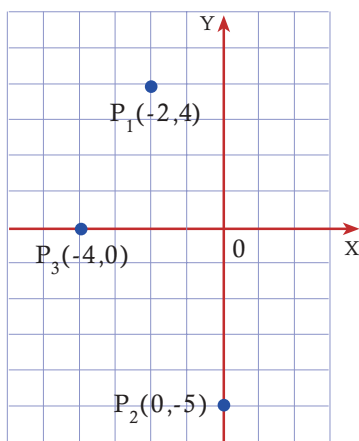
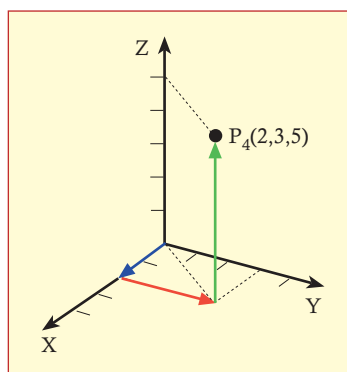


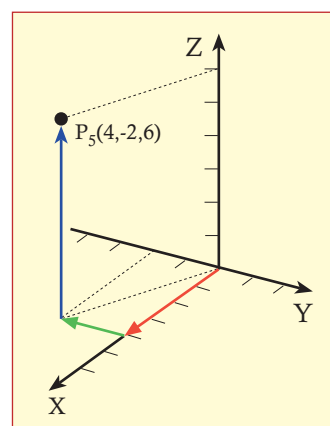
Fig. 2.9 Al rotar el lado OA alrededor del punto O, y de acuerdo con la flecha curvada, se origina un ángulo: a) Positivo, si el giro es en sentido contrario al de las agujas del reloj y b) Negativo, si el giro tiene el mismo sentido de las agujas del reloj.



(a)



(b)



(c)

Fig. 2.8 Soluciones para el ejemplo 2.1.

Si la rotación se efectúa en el sentido contrario al giro de las agujas de un reloj, fig. 2.9(a), se dice que el ángulo es positivo, mientras que si la rotación se produce en el mismo sentido de giro de las agujas de un reloj, fig. 2.9(b), se dice que el ángulo es negativo.

Una unidad de medida utilizada comúnmente para expresar los ángulos es el *grado*, el cual se define como *la medida del ángulo que se forma al girar el lado inicial (1/360) de una revolución completa*. Esta última corresponde, por tanto, a 360° . Media revolución corresponde a 180° y un cuarto de revolución a un ángulo recto (90°).

Otra medida usada con frecuencia para la medición de ángulos es el *radián*. A fin de comprender el significado de esta unidad, observemos la fig. 2.10.

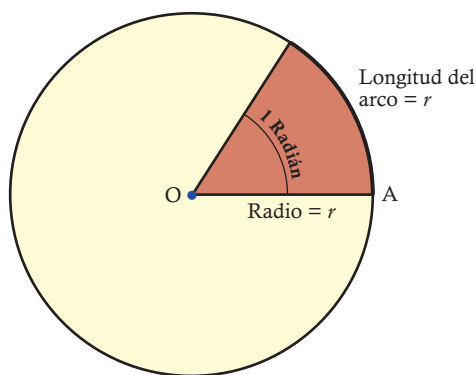


Fig. 2.10 Definición de radián.

Se trata de un círculo de radio r . El lado OA, cuya longitud es igual a r , se ha hecho girar un cierto ángulo en dirección contraria al giro de las agujas del reloj. Este giro es tal que la longitud del arco subtendido por dicho ángulo es también igual a r . Este ángulo corresponde a 1 radián. Existe una relación muy sencilla entre la longitud del arco subtendido y el valor de dicho ángulo expresado en radianes:

$$S = r\theta \quad (2.1)$$

Donde:

S = longitud del arco r = longitud del radio
 θ = ángulo en radianes

Para determinar cuántos radianes corresponden a un ángulo de 360° , recordemos que este ángulo se

genera al hacer un giro completo sobre una circunferencia. Para este caso, la longitud del arco es igual a $2\pi r$. Por tanto, de acuerdo a (2.1):

$$\theta = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi$$

lo que indica que al describirse un ángulo de 360° , la medida del ángulo equivale a 2π radianes. Este resultado permite convertir cualquier ángulo expresado en grados a su equivalente en radianes o, también, determinar cuál es el equivalente en grados de un ángulo dado en radianes. Así, si tenemos n grados, su equivalente en radianes será:

$$\begin{array}{ccc} 360 \text{ grados} & \text{————} & 2\pi \text{ radianes} \\ n \text{ grados} & \text{————} & x \text{ radianes} \end{array}$$

$$x = \frac{2\pi \cdot n}{360} = \frac{\pi \cdot n}{180} = \frac{\pi}{180} \cdot n \text{ radianes} \quad (2.2)$$

Por otra parte, si tenemos n radianes, su equivalente en grados podemos determinarlo mediante la relación:

$$\begin{array}{ccc} 2\pi \text{ radianes} & \text{————} & 360 \text{ grados} \\ n \text{ radianes} & \text{————} & x \text{ grados} \end{array}$$

$$x = \frac{360 \cdot n}{2\pi} = \frac{180 \cdot n}{\pi} = \frac{180}{\pi} \cdot n \text{ grados} \quad (2.3)$$

De acuerdo a lo anterior, podemos concluir:

Para convertir n grados a radianes,
multiplica n por $\pi/180$.

Para convertir n radianes en grados
multiplica n por $180/\pi$.

Ejemplo 2.2

a) Un ángulo central de un círculo de radio 0,75 m subtiende un arco de 0,30 m de longitud. ¿Cuál es la medida del ángulo en grados? b) Encuentra la longitud del arco correspondiente a un ángulo de 120° para una circunferencia de radio 2,5 m.

Solución

a) Usando (2.1) con $r = 0,75$ m y $S = 0,30$ m:

$$\theta = \frac{S}{r} = \frac{0,30}{0,75} = 0,4 \text{ radianes}$$

Mediante (2.3), determinamos el valor en grados:

$$\begin{array}{ccc} 2\pi \text{ radianes} & \text{---} & 360 \text{ grados} \\ 0,4 \text{ radianes} & \text{---} & x \text{ grados} \end{array}$$

$$x = \frac{360 \cdot 0,4}{2\pi} = 22,92^\circ$$

b) Primero reducimos 120° a radianes, usando la relación (2.2):

$$x = \frac{\pi}{180} \cdot 120^\circ = \frac{2}{3}\pi \text{ radianes}$$

Mediante (2.1), obtenemos:

$$\pi / 180 \quad S = r\theta = 2,5 \cdot \frac{2}{3}\pi = 5,23 \text{ m}$$

Razones Trigonométricas de un Triángulo Rectángulo

Considera el triángulo rectángulo de la fig. 2.11. Como sabes, un triángulo rectángulo tiene un ángulo de 90° y los otros dos, en este caso designados como α y β , son menores de 90° . Los lados que forman el ángulo recto reciben el nombre de *catetos*, mientras que al tercer lado se le conoce como *hipotenusa*. Es también usual designar los lados de un triángulo con una letra minúscula que se corresponde con la letra mayúscula del vértice opuesto. Por ejemplo, al cateto AB se le designa con la letra c porque al vértice opuesto se le designa con la letra C.

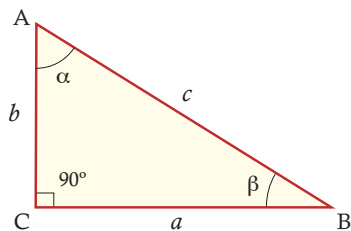


Fig. 2.11 Triángulo rectángulo.

La relación fundamental entre los lados de un triángulo rectángulo está dada por el teorema de Pitágoras, el cual, aplicado a la fig. 2.11, conduce a la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2 \quad (2.4)$$

También debemos recordar que la suma de los ángulos internos de un triángulo es igual a 180° . Luego:

$$\alpha + \beta + 90^\circ = 180^\circ$$

De donde:

$$\alpha + \beta = 90^\circ \quad (2.5)$$

con cuya relación se establece que *la suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es igual a 90°* . A los ángulos agudos α y β se les conoce como *ángulos complementarios*.

Seno de un ángulo

*En un triángulo rectángulo, a la relación entre la medida del cateto opuesto a un ángulo y la medida de la hipotenusa se le conoce como **seno** del ángulo.*

Entonces, para el triángulo de la fig. 2.11 y los ángulos α y β , podemos escribir:

$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{Cateto opuesto al ángulo } \alpha}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c} \quad (2.6)$$

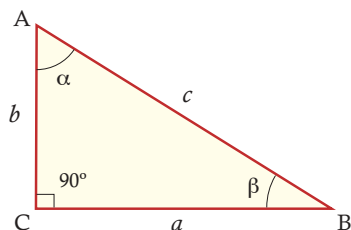
Similarmente, para el ángulo agudo β :

$$\text{sen}\beta = \frac{\text{Cateto opuesto al ángulo } \beta}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c} \quad (2.7)$$

Coseno de un ángulo

*En un triángulo rectángulo, a la relación entre la medida del cateto adyacente a un ángulo y la medida de la hipotenusa se le conoce como **coseno** del ángulo.*

Entonces, para el triángulo anterior, se tiene:



$$\cos \alpha = \frac{\text{Cateto adyacente al ángulo } \alpha}{\text{Hipotenusa}} = \frac{b}{c} \quad (2.8)$$

$$\cos \beta = \frac{\text{Cateto adyacente al ángulo } \beta}{\text{Hipotenusa}} = \frac{a}{c} \quad (2.9)$$

Tangente de un ángulo

Para el triángulo de arriba, las tangentes de los ángulos α y β son:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{Cateto adyacente a } \alpha} = \frac{a}{b} \quad (2.10)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\text{Cateto opuesto a } \beta}{\text{Cateto adyacente a } \beta} = \frac{b}{a} \quad (2.11)$$

Ejemplo 2.3

Determina los valores de $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ para el triángulo rectángulo mostrado en la fig. 2.12. ¿Cuál es el valor del ángulo β ? ¿Qué relación hay entre $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \beta$?

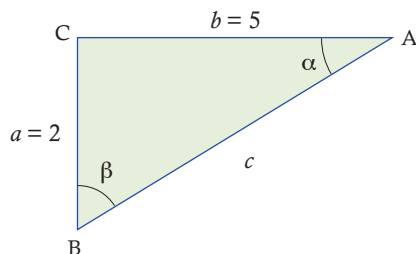


Fig. 2.12 Triángulo rectángulo para el ejemplo 2.3.

Solución

El valor de la hipotenusa está dado por:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} = 5,39$$

De acuerdo con las definiciones de seno, coseno y tangente, tenemos:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{a}{c} = \frac{2}{5,39} = 0,3710$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{5}{5,39} = 0,9276 \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Para determinar el ángulo β , debemos encontrar el valor de α . Para ello, hacemos uso de una calculadora y buscamos el valor del ángulo cuyo seno es igual a 0,3710 (o cuyo coseno o tangente son iguales a 0,9276 y 0,4, respectivamente). Este ángulo es de $21,78^\circ$. Como β es complementario con α , tendremos:

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 21,78^\circ = 68,22^\circ$$

De la fig. 2.12, podemos escribir:

$$\cos \beta = \frac{2}{5,39} = \frac{2}{5,39} = 0,3710$$

Observa que el $\operatorname{sen} \alpha$ es igual al $\cos \beta$. En general, para ángulos complementarios pueden escribirse las siguientes relaciones:

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \beta \quad \cos \beta = \operatorname{sen} \alpha$$

Razones Trigonómicas para los ángulos de 30° , 45° y 60°

Los ángulos de 30° , 45° y 60° aparecen con cierta frecuencia en aplicaciones comunes de la Física. Para determinar las razones trigonométricas de estos ángulos, hacemos uso del triángulo equilátero mostrado en la fig. 2.13(a), con lados de longitud igual a 2. Recuerda que los ángulos internos de un triángulo equilátero miden 60° y la perpendicular bajada desde un vértice al lado opuesto, divide a dichos lados en dos partes iguales y bisecta a uno de los ángulos de 60° en dos ángulos de 30° .

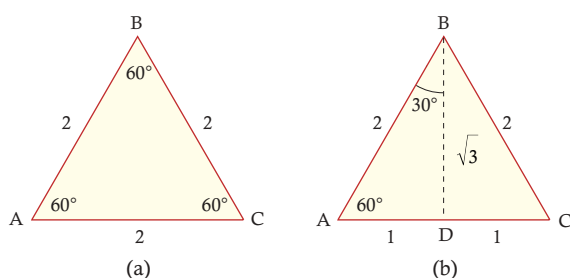


Fig. 2.13 Obtención de ángulos de 30° y 60° mediante un triángulo equilátero.

Mediante el teorema de Pitágoras, obtenemos la medida del lado BD de la fig. 2.13(b). Este valor corresponde a $\sqrt{3}$. A partir de esa figura, obtenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 30^\circ &= \frac{1}{2} & \cos 30^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \operatorname{tg} 30^\circ &= \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \operatorname{sen} 60^\circ &= \frac{\sqrt{3}}{2} & \cos 60^\circ &= \frac{1}{2} & \operatorname{tg} 60^\circ &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Para el caso de un ángulo de 45°, construimos un triángulo rectángulo con catetos cuya longitud es igual a 1, como se muestra en la fig. 2.14.

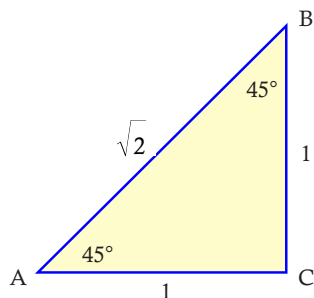


Fig. 2.14 Obtención de ángulos de 45° mediante un triángulo rectángulo isósceles.

Mediante el teorema de Pitágoras, obtenemos el valor de la hipotenusa ($\sqrt{2}$) y podemos escribir:

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \operatorname{tg} 45^\circ = 1$$

2.8 SISTEMA DE COORDENADAS POLARES PLANAS

Algunas veces es más fácil y más conveniente hacer la representación de un punto en el plano utilizando

el llamado sistema de *coordenadas polares planas*. En este sistema, las coordenadas se expresan por la notación (r, θ) , como se muestra en la fig. 2.15(a), donde r representa la distancia del origen al punto que tiene coordenadas rectangulares (x, y) y θ es el ángulo entre r y el eje positivo de las X, el cual normalmente se toma como referencia para medir el ángulo. Dicho ángulo siempre se mide en dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj.

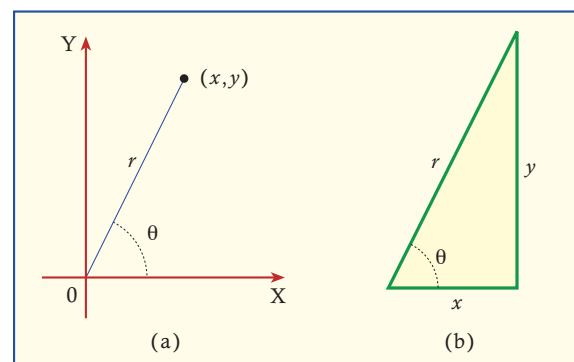


Fig. 2.15 Representación de las coordenadas polares planas mediante la distancia r y el ángulo θ . Este último se mide desde el eje positivo X y en sentido contrario al giro de las agujas del reloj.

Es relativamente fácil establecer relaciones matemáticas entre las coordenadas rectangulares y las polares, con lo cual podemos obtener los valores de coordenadas de uno de los sistemas, conociendo las coordenadas del otro. Así, por ejemplo, en la fig. 2.15(a), está representado un punto por las coordenadas polares (r, θ) . Las coordenadas rectangulares de este punto corresponden a (x, y) . Si extraemos de la fig. 2.15(a) el triángulo rectángulo, como se muestra en la fig. 2.15(b), el cual está conformado por las coordenadas de estos dos sistemas, podemos establecer, según las razones trigonométricas fundamentales, las siguientes relaciones que nos permitirán calcular las coordenadas de uno u otro sistema, según sea el caso:

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{y}{r} \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

$$r = \sqrt{y^2 + x^2} \quad (2.12)$$

Ejemplo 2.4

Refiriéndonos a la fig. 2.16, el punto A está señalado en coordenadas rectangulares como $(3, -4)$, calcular las coordenadas polares (r, θ) de ese punto. Utilizar como unidad de medida el metro.

Solución

Calculemos, en primer lugar, el valor de r . Por el teorema de Pitágoras, ecuación (2.12), se tiene:

$$r = \sqrt{(3 \text{ m})^2 + (-4 \text{ m})^2} = 5 \text{ m}$$

Por aplicación de la relación (2.12), podemos calcular el ángulo de r :

$$\tan \theta = \frac{y}{r} = \frac{-4}{3} = -1,33$$

El ángulo, al cual corresponde este valor de la tangente, es 307° (Este valor puede obtenerse en una calculadora). Las coordenadas polares serán, entonces, $(5, 307^\circ)$.

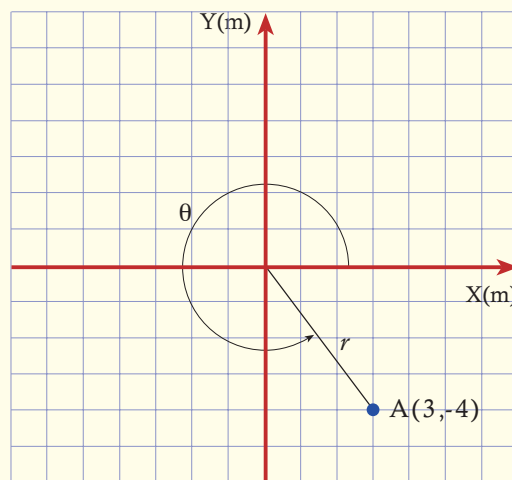
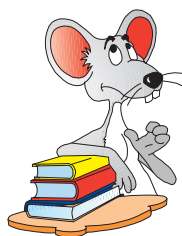


Fig. 2.16 Ejemplo 2.4.

**PIENSA Y EXPLICA**

- 2.1 ¿Cuál es la diferencia entre el lenguaje cotidiano y el lenguaje de la ciencia?
- 2.2 ¿Por qué es diferente el vocablo *trabajo* en el habla común y en la Física?
- 2.3 ¿Qué diferencia hay en la palabra *observador* cuando se usa en el lenguaje común y en el de la Física?
- 2.4 ¿Qué se conoce como sistema de referencia o marco de referencia?
- 2.5 Describe cómo se establece un sistema de referencia?
- 2.6 ¿Bajo qué condiciones se puede establecer que algo está en reposo o en movimiento?

- 2.7 ¿Por qué es importante establecer un marco de referencia?
- 2.8 ¿Por qué se dice que no tiene sentido describir el movimiento de un cuerpo sin establecer cuál es el marco de referencia?
- 2.9 Explica los movimientos rectilíneo y parabólico de la fig. 2.1. ¿Es rectilíneo o parabólico el movimiento del proyectil?
- 2.10 ¿Por qué se dice que el movimiento es relativo? ¿Qué tiene esto que ver con el marco de referencia?
- 2.11 ¿Cuál es la diferencia básica entre el Principio de la Relatividad de Galileo y la Teoría de la Relatividad de Einstein?

2.12 ¿Podrías dar una definición de espacio?

2.13 ¿A qué se les denomina números de posición? ¿Cómo se utilizan para señalar la ubicación de un objeto en el espacio unidimensional, bidimensional o tridimensional?

2.14 Describe, mediante la figura apropiada, un sistema tridimensional de coordenadas rectangulares. ¿Constituye este sistema un marco de referencia?

2.15 Explica cuándo es apropiado usar sistemas de coordenadas unidimensionales y bidimensionales.

2.16 Describe el sistema de coordenadas polares y cómo se puede utilizar para representar un punto en el plano.

2.17 ¿Cuáles son las relaciones que permiten pasar de un sistema de coordenadas rectangulares a un sistema de coordenadas polares?



PROBLEMAS



2.1 ¿Cuál es la medida del ángulo que se genera al dar: **a)** Un giro de $1/10$ de revolución contrareloj? **b)** Un giro de $3/4$ de revolución a favor del reloj?

2.2 Indica el número de revoluciones o fracción de una revolución representada por los ángulos, cuyas medidas en grados son: **a)** -45° . **b)** 30° . **c)** 1.440° .

2.3 Convierte los siguientes grados en radianes, expresando los resultados como múltiplos racionales de π :

- a)** 30° **b)** 45° **c)** 60°
d) 120° **e)** -135°

2.4 Usa una calculadora para convertir los siguientes ángulos de grados a radianes:

- a)** 15° **b)** -87°
c) -140° **d)** 162°

2.5 Convierte, sin usar una calculadora, los siguientes ángulos a grados:

- a)** $\frac{\pi}{4}$ rad **b)** $-\frac{\pi}{3}$ rad **c)** 4π rad **d)** $-\frac{3}{8}\pi$ rad

2.6 Representa los siguientes puntos en un sistema de coordenadas cartesianas: **a)** $P_1(0, 3)$, $P_2(0, -4)$, $P_3(4, 2)$, $P_4(-3, -7)$, $P_5(-4, 4)$, $P_6(-1, -5)$. **b)** $P_7(0, 0, 2)$, $P_8(1, 4, 0)$, $P_9(3, 1, 5)$, $P_{10}(3, 0, 4)$, $P_{11}(3, -3, 2)$.

2.7 Representa los siguientes puntos en un sistema de coordenadas polares: $P_1(3, 30^\circ)$, $P_2(4, 135^\circ)$, $P_3(4, 0^\circ)$, $P_4(6, -30^\circ)$, $P_5(5, 225^\circ)$, $P_6(4, 180^\circ)$, $P_7(0, 20^\circ)$, $P_8(1, 270^\circ)$.

2.8 Convierte las siguientes coordenadas rectangulares en coordenadas polares: **a)** $P_1(3, 4)$. **b)** $P_2(2, -5)$. **c)** $P_3(5, 0)$.

2.9 Convierte las siguientes coordenadas polares en coordenadas rectangulares: **a)** $P_1(4, 75^\circ)$, **b)** $P_2(10, -30^\circ)$, **c)** $P_3(6, 240^\circ)$.

2.9 HERRAMIENTAS CONCEPTUALES DE OBSERVACIÓN: ESPACIO Y TIEMPO

Espacio

En la vida cotidiana al espacio se le considera o identifica con la idea de vacío, entendiendo aquí por vacío aquello que queda después que hayamos retirado todas las cosas materiales que pudieran existir. Igualmente, asemejamos la idea de espacio a la extensión y, también, pensamos que el espacio es como un gran recipiente en el cual están contenidas todas las cosas que forman el universo: metagalaxias, galaxias, estrellas, cometas, planetas, etc.

La ciencia, por supuesto, tiene conceptos del espacio muy diferentes a los de las personas comunes y corrientes. Hasta finales del siglo XIX, la Física mantuvo el criterio que el espacio era sustancialmente tal como lo percibían nuestros sentidos; es decir, un espacio que percibimos como tridimensional, el cual puede describirse mediante la geometría euclidiana. Haciendo referencia a los sistemas de coordenadas, podemos decir que el *espacio es un conjunto tridimensional de puntos*, al cual se le puede aplicar el sistema de coordenadas cartesianas para fijar, a cada punto, lecturas de *posición o coordenadas*. Este modelo de espacio, denominado también *modelo cartesiano*, ha servido y sigue sirviendo satisfactoriamente de marco para la descripción de los fenómenos físicos estudiados por la *Física Clásica*, con cuyo nombre se designa a la Física desarrollada hasta finales del siglo XIX, pues a partir de la última década de ese siglo, surgió una verdadera revolución en esta ciencia, con la *Teoría de la Relatividad* y la *Física Cuántica*,



La idea del espacio trae a nuestra mente el Universo infinito con todos sus elementos: planetas, estrellas, galaxias y otros cuerpos siderales.

donde el concepto del espacio y del tiempo, adquirieron nuevos y radicales significados. La Física desarrollada desde entonces es conocida actualmente como la *Física Moderna*.

Tiempo

Comúnmente, pareciera que percibimos el tiempo por la medida que hacemos del mismo, usando los relojes



En la vida cotidiana, el concepto de tiempo parte de la experiencia humana, que lo percibe como un flujo que va siempre del pasado al futuro. Tenemos la sensación que el tiempo es un flujo dinámico, lleno de actividades pues, a cada instante, estamos relacionando el tiempo con todo lo que hacemos. El paso de las horas, días, meses, la aparición del día y de la noche y tantos otros eventos periódicos, que estamos continuamente presenciando, nos permiten afirmar, en lenguaje común, que existe un tiempo que identifica la progresión de ocurrencias de actividades y eventos. También, en la cotidianidad, al tiempo lo percibimos cuando lo medimos mediante nuestros comunes relojes.

Desde el punto de vista de la ciencia, el concepto de tiempo tiene un significado muy diferente al comúnmente aceptado por la gente. A cualquier evento físico que ocurra, por ejemplo, el vuelo de las aves, la caída de la lluvia, el sonido de la bocina de un automóvil, podemos describirlo si identificamos dónde ocurrió y cuándo ocurrió.

Podemos generalizar diciendo que cualquier evento o fenómeno físico siempre ocurrirá en el espacio y en el tiempo.

La Física moderna tiene sus aportes más importantes en la explicación de los fenómenos a altas velocidades, cercanas a la velocidad de la luz, y de los fenómenos a nivel atómico, mediante la Teoría de la Relatividad y la Física Cuántica. Estas nuevas teorías no rechazan el modelo cartesiano del espacio y el tiempo; simplemente, lo han revisado para adecuarlo a los nuevos conocimientos de la ciencia actual.



De aquí, se concluye que el espacio y el tiempo son entidades que marchan unidas y, por lo tanto, podemos anexar el tiempo al modelo cartesiano del espacio descrito en el punto anterior, ubicando al reloj en el origen de coordenadas.

Si bien en la Física Clásica al tiempo y al espacio se les considera como dos conceptos separados, en la Física moderna, a partir de la Teoría de la Relatividad, estos dos conceptos son tratados como uno solo y, así, se sustituyen las expresiones "*el espacio y el tiempo*" por la expresión única "*espacio-tiempo*", recordando, por supuesto, que el tiempo es la cuarta dimensión del espacio-tiempo.

Aclaremos que el modelo del espacio y el tiempo, como se ha presentado, corresponde a la Física Clásica, y los mismos siguen siendo válidos para la descripción de los fenómenos naturales, a nivel de nuestro sistema planetario.

2.10 MEDICIÓN DE LA LONGITUD Y DEL TIEMPO

La descripción de los fenómenos físicos está relacionada íntimamente con la medición. En efecto, se dice universalmente, en forma muy simplificada, que *la Física es la ciencia de medición de los fenómenos físicos*. De acuerdo a lo expresado antes, podemos definir la Física así:

La Física es una ciencia esencialmente cuantitativa aplicada a la medición y al análisis de los objetos que constituyen el Universo, desde las partículas constitutivas del átomo, hasta las complejas estructuras como las estrellas, galaxias y metagalaxias.

Medición de la longitud

Para realizar la medición de la longitud, se tiene siempre que comparar la longitud que se desea medir con un instrumento graduado en unidades de longitud, cualquiera que sea el sistema de medidas seleccionado. El instrumento graduado puede ser una regla, una cinta o cualquier otro medio aceptado para llevar a efecto la acción de medir. Para que podamos obtener resultados lo más ajustados a la realidad, toda medición debe ceñirse a los criterios de *precisión y exactitud*, de tal manera que la medición de algo como la longitud de la carretera entre la ciudad de Cumaná a Puerto La Cruz, o de un fenómeno físico importante como la medición de la distancia entre la órbita del planeta Marte y la órbita de nuestro satélite, la Luna, cuando ambos cuerpos siderales se encuentran en su punto más cercano, den resultados confiables y creíbles por la comunidad científica y por las personas en general.

Para que la medición tenga la máxima exactitud, el instrumento de medición debe ser comparado con un *instrumento patrón*. La construcción de este instrumento patrón debe ser de tal calidad que las mediciones que se hagan repetidas veces, darán resultados iguales y precisos, dentro de un grado de precisión aceptado por las normas de la *Metrología*, la ciencia de la medición.



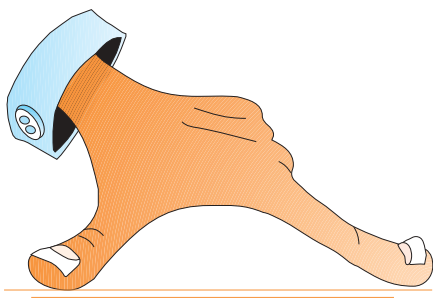
Entonces, la exactitud de un instrumento está limitada por el grado de aproximación de las medidas que con él se hagan, a la medida de un instrumento establecido como patrón.

Para poder comunicar los resultados de una medición, tenemos, necesariamente, que expresarlos mediante un número, indicando, simultáneamente, la unidad empleada. Ahora bien, debemos tener claro qué significa la palabra **unidad**.

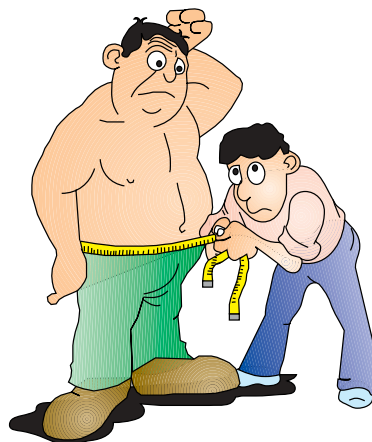
Se debe entender por unidad una medida admitida para reconocer una cantidad física.

Desde la antigüedad, se han venido empleando diversas unidades de medida, la mayoría de las cuales surgieron sin ningún criterio técnico ni científico.

Tomemos como ejemplo la unidad de medida de longitud usada por los egipcios en la construcción de las pirámides: el *codo*. Esta unidad de medida se tomó como la distancia entre el codo de un brazo y el final del dedo medio de la mano. Otras unidades como la *vara*, el *pie*, y la *pulgada*, han sido utilizadas durante siglos en los países anglosajones. En Venezuela se usó popularmente el *geme*, distancia entre los dedos pulgar e índice cuando se estiran en su máxima longitud. Sin embargo, debido a que las unidades mencionadas eran poco precisas y su longitud no era estándar, quedaron en desuso, ya que el tamaño de los dedos, por ejemplo, varía según cada persona. Además, esa variedad de unidades generaba un sistema de medidas no normalizado que crea-



El *geme* era una unidad de medida usada en Venezuela. Se trataba de la distancia entre el dedo índice y el dedo pulgar, cuando se estiraban a la máxima longitud posible. Como es de suponer, esta medida variaba de una persona a otra, según el tamaño de sus dedos.



La medición siempre se realiza usando como patrón un instrumento previamente definido como patrón.

ba muchos obstáculos para la comprensión de la información sobre el avance de los conocimientos científicos y del comercio.

Para resolver los problemas mencionados, en 1960 se admitió, a nivel mundial, el llamado **Sistema Internacional de Unidades**, abreviado **SI**, adoptado por la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, creada en 1875 (BIPM, Bureau Internationale des Poids et Mesures) con el objeto de crear un conjunto de patrones de uso internacional. En la actualidad, esta oficina administra el Sistema Internacional de Unidades y convoca, cada 6 años, a conferencias para tratar sobre la adopción de unidades patrón de medidas y sobre los factores que afectan a los patrones en lo referente a temperatura, presión, altura sobre el nivel del mar, etc. La oficina tiene su sede en París, Francia.

El Sistema Internacional de Unidades está basado en el sistema métrico decimal, lo cual significa que sus unidades son múltiplos o divisores de 10, o, dicho de otra manera, sus unidades se dividen en 10, 100, 1000, 10.000, ... , partes iguales.

La unidad de patrón de longitud del SI es el metro, que se simboliza por *m*. Su nombre proviene del Latín que significa medir. Es necesario tener en cuenta que **m** es un símbolo y no una abreviación, por lo tanto no debe emplearse el punto, igualmente podemos escribir indistintamente "1 metro" o "1 m".



El sistema SI está basado en el sistema métrico decimal y cuenta en la actualidad con 7 patrones de unidades básicas: el metro, para medir la longitud; el kilogramo, para medir la masa de los cuerpos; el segundo, para medir el tiempo; el amperio para medir la intensidad de corriente eléctrica que circula por un conductor; el grado kelvin para medir la temperatura; el mol para medir la cantidad de sustancia a nivel molecular y la candela para medir la intensidad luminosa.

El metro, como unidad de medida, fue definido originalmente por científicos franceses en 1799, sobre la base de dividir el meridiano terrestre que pasa por la ciudad de París, desde el Ecuador al Polo Norte, en diez millones de partes iguales (ver fig. 2.17). Una de estas partes constituye el metro.

Por razones prácticas y debido a dificultades, entre otras los problemas para realizar las mediciones del meridiano, se decidió, en 1889, adoptar como metro patrón, a la distancia de una diezmillonésima parte del meridiano entre dos líneas grabadas en una barra constituida por una aleación de Platino e Iridio. Esta barra patrón se conserva en el Museo de Artes y Oficios de París, y la misma se guarda en un profundo sótano, en una caja fuerte, bajo una campana de vidrio a temperatura constante. El sótano está cerrado con 3

llaves diferentes y cada una de estas llaves las guarda un funcionario distinto. Se tienen implementadas otras medidas de seguridad.

La circunstancia de que este metro patrón pudiera ser vulnerable a una catástrofe natural, como un terremoto, o una guerra y, debido al hecho que este patrón no resultó ser exactamente igual a una diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano que pasa por París, como se había supuesto, el académico francés Jacques Babinet (1794-1872) propuso utilizar como patrón, la longitud de onda de alguna raya del espectro físico de un elemento químico, con la idea de que se dispusiera de una magnitud absolutamente invariable, que no dependiera ni siquiera de perturbaciones cósmicas (ver fig. 2.18). Esta idea fue promovida en 1892, por primera vez, por el físico norteamericano A. Michelson (1852-1931), pero fue sólo en 1958 cuando, sobre la base de esta idea, se estableció una nueva definición del metro patrón, la cual dice:

El metro es igual a 1.650.763,73 veces la longitud de onda, en el vacío, de la radiación correspondiente a la transición entre los niveles 2p y 5d del átomo de Kriptón 86.

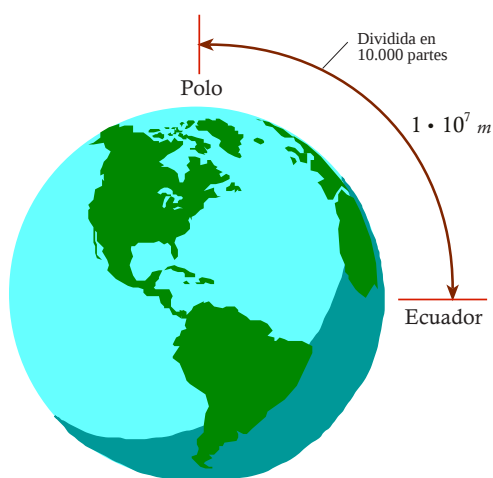


Fig. 2.17 En 1889 el metro se definió como la diezmillonésima parte de la distancia entre el ecuador y el polo terrestre, medida sobre uno de los meridianos. Esa distancia fue marcada sobre una barra compuesta por una aleación de Platino e Iridio.

Esta definición se menciona aquí a título informativo, sin entrar en detalles conceptuales sobre los términos utilizados en la misma. Con esta nueva definición del metro patrón, quedó superada la importante observación que se hacía sobre lo impreciso en la determinación de la separación entre las líneas grabadas sobre la barra de Platino-Iridio, lo cual, como se dijo antes, no satisfacía las necesidades de mediciones precisas, requeridas actualmente por el desarrollo de la ciencia y la tecnología.

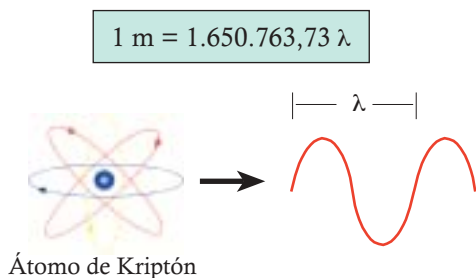


Fig. 2.18 En 1958 se definió el metro en base a la longitud de onda de un isótopo del elemento químico Kriptón. En 1961, por convenio internacional, se adoptó esta longitud de onda como patrón de medida de la longitud.

Más recientemente, en 1983, con el advenimiento de la tecnología de los rayos láser, los cuales han permitido determinar la velocidad de la luz con alta precisión (hoy en día se ha establecido como definitiva en 299.792.458 m/s), se ha dado la siguiente nueva definición del metro patrón:

El metro es la unidad de medida de longitud equivalente a la longitud del trayecto recorrido en el vacío por la luz de un rayo láser durante un tiempo de $1/299.792.458$ de segundo.

Se considera como definitiva esta unidad de metro patrón, debido a que está basada en la velocidad de la luz, la cual se ha determinado como una constante natural, universal e invariable. En la fig. 2.19 se ilustra la forma de medir el segundo, de acuerdo con la anterior definición.

De la unidad metro patrón se derivan otras unidades como la unidad de superficie, el metro cuadrado, expresado como $m \cdot m = m^2$, o la unidad de volumen, el metro cúbico, expresado como $m \cdot m \cdot m = m^3$.

Una unidad de longitud utilizada con frecuencia en Física, sobre todo en la descripción del movimiento circular de los cuerpos, y ya estudiada en la sección 2.7, es el *radián*. El radián es la unidad SI de la medida de ángulos planos y equivale a un ángulo de $57,3^\circ$.

Medición del tiempo

Para realizar la medición del tiempo se procede en forma similar a como se indicó para la medición de la longitud; esto es, se compara un intervalo de tiempo que queremos medir con una unidad aceptada de medida del tiempo. El tiempo puede ser medido utilizando las diversas unidades conocidas, como el minuto, la hora, el día, etc. Sin embargo, al igual que para la medición de la longitud, el Sistema Internacional de Medidas adoptó como unidad fundamental de medida del tiempo el **segundo**, que se escribe con el símbolo **s**, sin punto gramatical. La medida del tiempo tuvo su origen en la observación de los movimientos de la Tierra. Los egipcios, hace más de 3.000 años, dividieron en 12 horas el día y la noche y se dice que los babilonios, hace aproximadamente 4.000 años, adoptaron el número 60 como base de su aritmética, por lo que se acostumbraron a dividir las cosas por 60 o por 12 como una fracción entera.

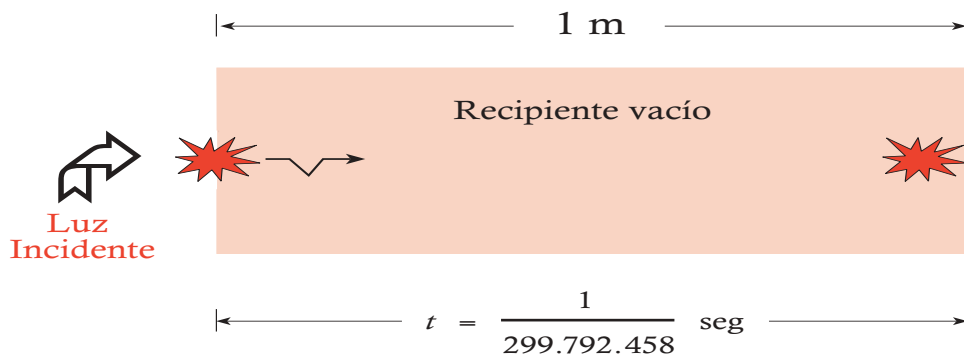


Fig. 2.19 Actualmente, se define al metro como la distancia recorrida por la luz en $t = \frac{1}{299.792.458}$ seg.

Algunos autores afirman que fue Hiparco de Alejandría (astrónomo griego del siglo II a. c.) quien adoptó el modelo de dividir el día y la noche en 12 horas, la hora en 60 minutos y el minuto en 60 segundos. Otros autores afirman que fue probablemente en el siglo XIV cuando se dividió la hora en 60 minutos y el minuto en 60 segundos. Como se podrá ver, las unidades del tiempo no siguen la estructura del sistema métrico decimal; es decir, sus unidades no son múltiplos o divisores de 10; sin embargo, forman parte fundamental del Sistema Internacional de Unidades, como se ha dicho. En todo caso, el segundo, como toda unidad de medida, debe tener un patrón de referencia, tal como se ha explicado antes para el patrón de medidas de longitud.

Inicialmente, se aprovechó para definir al segundo como el movimiento cíclico de la Tierra alrededor del Sol. Entonces, el *segundo* se definió como $1/315\,569\,25,9747$ parte del año tropical, correspondiente a un intervalo de tiempo entre 2 posiciones iguales de la tierra en relación a las estrellas. Debido a ciertos fenómenos de perturbación en el movimiento constante de la Tierra, lo que determina que el año tropical se atrase aproximadamente 0,5 segundos en un siglo, se tomó como patrón la duración del año 1900, iniciándose éste el 31 de diciembre de 1899 a las 12 del medio día.

No obstante haber realizado el cambio a este patrón, considerado más preciso que el anterior, se decidió definir el segundo en base a un patrón atómico, tal como se hizo, en su oportunidad, con el patrón del

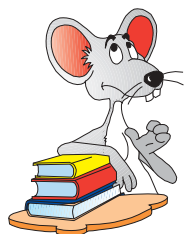


El tiempo y su medida ha sido motivo de grandes reflexiones en la historia de la humanidad.

metro. En 1967, en la XIII Conferencia General de Pesas y Medidas, se adoptó la unidad del SI de tiempo, el *segundo*, el cual quedó definido así:

Un segundo es el intervalo asociado a 9.192.631.770 periodos de radiación correspondiente al paso del electrón entre 2 niveles superfinos del estado fundamental del isótopo de Cesio con el número de masa 133 (Cs_{133}).

El intervalo es medido con un reloj de haz atómico, el cual es tan preciso que, actualmente, con los recursos de la electrónica, se pueden realizar mediciones de intervalos con un error de 1 segundo en 3.000.000 de años.



PIENSA Y EXPLICA



2.18 ¿Podrías definir lo que para ti significan espacio y tiempo ?

2.19 ¿Cómo define el modelo cartesiano el concepto de espacio?

2.20 ¿A qué se denominan Física Clásica y Física Moderna?

2.21 ¿Por qué se dice que un evento físico ocurre en el espacio y en el tiempo?

2.22 ¿Cuál es la diferencia, en las Físicas Clásica y Moderna, en el tratamiento de la dualidad espacio-tiempo?

2.23 ¿Por qué se dice que la Física es la ciencia de la medición de los fenómenos físicos? Desde ese punto de vista, ¿cómo se define la Física?

2.24 ¿Qué es un patrón de medidas? ¿Para qué se utiliza?

2.25 ¿Qué es una unidad de medida?

2.26 ¿Por qué se desecharon algunas unidades antiguas de medida? ¿Qué es un codo? ¿Qué es un gome?

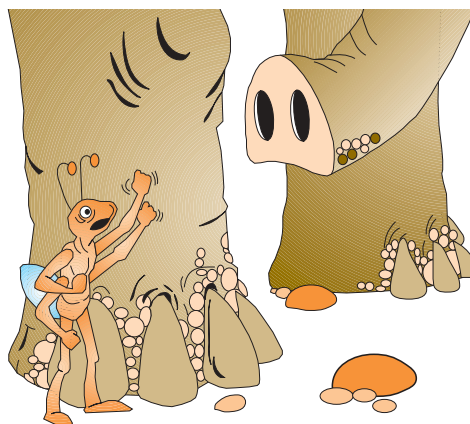
2.27 ¿Por qué hubo necesidad de adoptar un Sistema Internacional de Medidas?

2.28 ¿Cuáles son las unidades básicas del Sistema Internacional de Medidas?

2.29 Describe las distintas definiciones que se dieron al metro como unidad fundamental de longitud

CAPÍTULO 3

Escalas del Universo Físico



Una idea general y muy simplificada sobre lo que es el Universo, se puede expresar diciendo que el Universo o Cosmos, como también se le identifica, significa todo lo existente: planetas, estrellas, galaxias, la luz, los rayos X, el calor; incluye, además, el espacio y el tiempo y, en general, toda unidad de materia muy grande, como los conglomerados de galaxias en las metagalaxias, y toda unidad de materia muy pequeña, como las partículas subatómicas: electrones y protones, entre otras. La ciencia que estudia el origen y naturaleza del Universo o Cosmos se denomina **Cosmología** y la ciencia que estudia los planetas, estrellas, galaxias, y otros cuerpos celestes, es decir, todas aquellas formaciones siderales más allá de los confines de la Tierra, es la **Astronomía**.

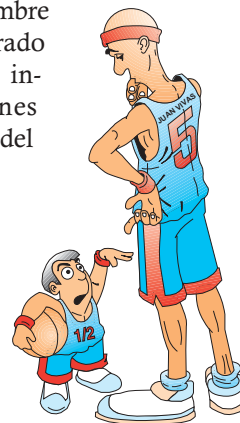
3.1 EL UNIVERSO FÍSICO

Para los efectos de la Física, el Universo Físico comprende el mismo marco del Universo o Cosmos, pero visto desde la perspectiva del estudio de sus principios generales, del estudio de los fenómenos naturales y de las propiedades de la materia y la energía. La expresión "*Escalas del Universo*" la debemos entender como una manera de explicar, en forma muy simplificada, los conocimientos e interacciones que se tienen de las cosas a diferentes niveles de distancia y tiempo, partiendo de la base del ámbito cotidiano del hombre. Todas las interacciones entre nosotros y las cosas las percibimos directamente por nuestros sentidos, o a través de instrumentos adecuados. A partir de la escala hu-

mana, podemos considerar las escalas de la longitud y el tiempo hacia el *macromundo* y hacia el *micromundo*.

3.2 ESCALA HUMANA: LA LONGITUD

En el ámbito cotidiano del hombre, la escala de la longitud se inicia con la llamada "*escala humana*", que corresponde numéricamente a 10^0 , o sea 1 m. En esta escala, nos encontramos con los diversos objetos con los cuales interactuamos cotidianamente: cosas del hogar, animales domésticos, plantas medianas y, en el mundo propio de la Física, la longitud de ondas de radio utilizadas para la transmisión de señales de televisión. En el rango de esta escala existe la mayor interacción posible entre el hombre y las cosas existentes del mundo y entre las mismas cosas. En el ambiente de esta escala, se creó la Física Clásica, con la Mecánica como su rama fundamental, la que ha permitido al hombre diseñar máquinas con alto grado de complejidad, complejos industriales y hasta estaciones planetarias para la conquista del espacio sideral.



La escala humana
corresponde a 1 m.

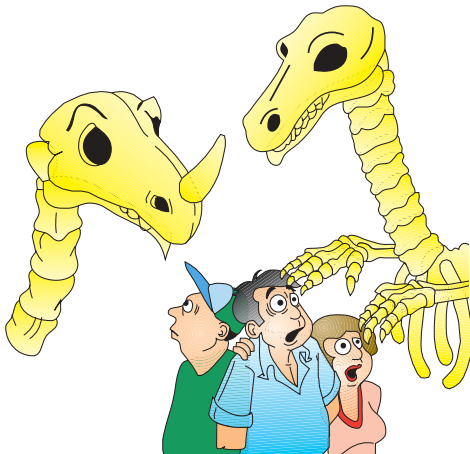
3.3 ESCALAS DEL MACROMUNDO

A continuación se menciona, en un recorrido por el Universo, el alcance actual del conocimiento del hombre sobre las cosas y fenómenos del Cosmos. Después de la escala humana de 10^0 , la siguiente en orden de magnitud es la escala de 10^1 , es decir, la escala de 10 m, en la cual tenemos también interacciones cotidianas con las cosas que nos rodean. Por ejemplo, un edificio de tres pisos tiene una altura aproximada de 10 m. Árboles, como el cocotero, también son comunes en esta escala, así como la culebra de agua, la Anaconda, y la longitud de una onda corta de radio en frecuencia modulada.

En la escala de 10^2 , aun cuando no existen animales a considerar, hay árboles, como la Secuoyas de California, en Estados Unidos, y los Eucaliptos de Australia, que pueden rebasar los 100 m de altura.

Cuando entramos en las escalas 10^4 y 10^5 , los objetos más representativos podemos referirlos a satélites que giran alrededor de planetas como Marte y Júpiter. Por ejemplo, el diámetro menor del satélite Deimos, de Marte, que no es completamente esférico, es de 10 kilómetros, y el satélite de Júpiter, llamado Himalia, tiene aproximadamente 100 kilómetros de diámetro.

Siguiendo el ascenso, tenemos que en las escalas de 10^6 y 10^7 , la Tierra, nuestra morada, ya pierde sus detalles y se nos presenta como una esfera de color azul. Un elemento representativo en la escala de 10^6



La escala humana fue ampliamente superada por animales prehistóricos, que existieron hace millones de años.

m puede ser, también, el satélite de Urano, Titania, que tiene un diámetro de 1.040 kilómetros, y en la escala de 10^7 , el planeta Venus tiene un diámetro de 12.100 kilómetros. La interacción predominante en estas escalas es la atracción gravitatoria.

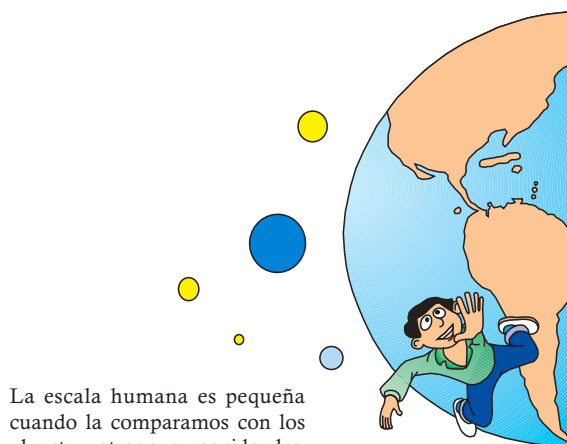
A la escala de 10^9 m, la esfericidad de la Tierra es perfectamente nítida. La interacción más relevante es la atracción gravitacional entre la Tierra y su satélite, la Luna.

En la escala de 10^{12} m, lo único que podemos relacionar con nuestro planeta Tierra es la longitud de su órbita alrededor del Sol, que es de 940 millones de kilómetros. Las distancias entre los cuerpos siderales, estrellas, galaxias, son tan colosales, que es difícil concebirlas utilizando como unidad de medida el metro. Para tener una idea concreta sobre este particular, veamos lo siguiente: si trazamos una esfera tomando como centro la Tierra, con radio igual 10^{12} m o, expresándolo en kilómetros, para mayor entendimiento, un radio igual a 1 billón de kilómetros, dentro de esa esfera no atrapamos ninguna estrella. Esto nos da una idea de las ingentes distancias que nos separan de las estrellas. Recordemos que nuestro Sol pertenece a la galaxia la Vía Láctea, y está ubicado cerca del borde de la misma. La estrella más cercana a nosotros pertenece, por supuesto, a la Vía Láctea, se llama Alfa del Centauro y está a 41.600 billones de kilómetros, aproximadamente 10^{16} metros, de nosotros. Recordando que la luz viaja, en números redondos, a la enorme velocidad de 300.000 km/s, un rayo de luz tarda en llegarnos, desde Alfa del Centauro, 4 años y 3 meses.

Se estima que nuestra galaxia, la Vía Láctea, tiene 10^{11} estrellas y su diámetro es de, aproximadamente, 10^{21} m. Saliendo de nuestra galaxia, la próxima galaxia es la gigante Andrómeda, la cual se encuentra a $2 \cdot 10^{22}$ m y contiene, aproximadamente, $4,5 \cdot 10^{11}$ estrellas. Es, por lo tanto, un 50% más grande que nuestra Vía Láctea. La Andrómeda es la única galaxia fuera de la Vía Láctea que puede ser observada, muy rudimentariamente, sin necesidad de usar un telescopio. La próxima galaxia, después de la Andrómeda, se denomina Maffei 1, en honor a su descubridor, el astrónomo italiano Paolo Maffei, quien la descubrió en 1960. Esta galaxia se encuentra a $3 \cdot 10^{22}$ m. El conjunto de la Vía Láctea, la

Andrómeda y la Maffei 1, junto con varias galaxias enanas, consideradas como satélites de las mismas, constituyen el llamado "*grupo local*", un conglomerado que se estima que contiene 10^{12} estrellas. Este *grupo local* interactúa, manteniendo su cohesión a través de la atracción gravitatoria.

Saliendo de los límites del *grupo local*, nos encontramos con más y más galaxias, de tal manera que a la distancia de 10^{25} m, es casi imposible observar galaxias individuales y sólo pueden ser observados enjambres de galaxias. Algunos autores denominan a dichos enjambres *Metagalaxias*. A esta misma distancia, se descubrieron unos cuerpos parecidos a estrellas que tienen la propiedad de comportarse como generadores de ondas de radio y que, aparentemente, se alejan de nosotros a grandes velocidades. Estos cuerpos fueron llamados "*fuentes de radio cuasiestelares*", donde la expresión "*cuasiestelar*" significa "parecido a una estrella". La frase cuasiestelar se ha sintetizado en la expresión inglesa "*quasars*". Un poco más allá de la distancia de 10^{26} m, se han descubierto 2 quasars, el OH471 y el 3C427. En la actualidad, se cree que éstos pueden ser los objetos más alejados que nos sea posible observar. Más allá de esta distancia, posiblemente se encuentren los límites del Universo observable.

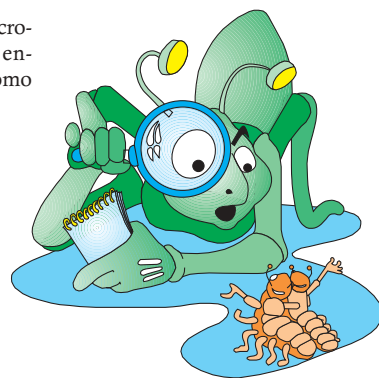


La escala humana es pequeña cuando la comparamos con los planeta u otros cuerpos siderales.

3.4 ESCALAS DEL MICROMUNDO

Para manejar estas escalas, se hace uso de las potencias de 10^n , siendo n cualquier número entero negativo. Partiendo de la escala humana 10^0 , tenemos que a la escala inmediata inferior, 10^{-1} , o sea 0,1 m, podemos interactuar con insectos que se acercan a

En la escala del micro-mundo, podemos encontrar animales como pequeños insectos.



la longitud de 10^{-1} ; pero, para efectos propios de la Física, podemos mencionar que existen ondas electromagnéticas de, aproximadamente, 10^{-1} m de longitud, en el rango de las microondas, siendo las microondas un intervalo de ondas de radio de longitud muy pequeña.

En la escala de 10^{-3} , encontramos ondas electromagnéticas de 1 milímetro de longitud, las cuales se encuentran en el límite inferior de la gama de las ondas de radio. En la región de las escalas de 10^{-6} m y 10^{-7} m, se encuentran componentes de formas de vida como una célula de la bacteria E. Coli, que habita en los intestinos humanos, la cual puede tener una longitud de, aproximadamente, $2 \cdot 10^{-6}$ m; un gen, unidad de factor hereditario, se estima que tiene una longitud de $1,25 \cdot 10^{-7}$ m. Por encima de la escala de 10^{-8} m, se estima que no existen estructuras que puedan considerarse vivientes.

En la escala de 10^{-9} m se entra al campo de la constitución electrónica de la materia, a nivel de formaciones moleculares. La molécula puede estar constituida por átomos de una misma clase o por átomos diferentes. En la escala de 10^{-10} , se encuentran los átomos más pequeños como el Hidrógeno, el Helio y el Carbono, con un diámetro aproximado de 10^{-10} m. En la escala de 10^{-14} m, se vislumbra el diámetro del núcleo del átomo, el cual está constituido por los protones, dotados de carga eléctrica positiva y los neutrones, que como su nombre lo indica, carecen de carga eléctrica. En la escala de 10^{-15} m, se ubican el diámetro del protón y del neutrón y el radio del electrón. Más abajo de estas escalas, se encuentran otras partículas elementales, que no es menester detallar, ya que están fuera del alcance del objetivo de este curso.

3.5 LOS 4 TIPOS DE FUERZAS EN LA NATURALEZA

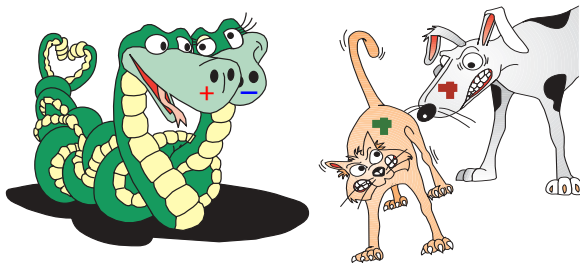
Mencionadas como han sido las diversas escalas de longitud del Universo, sobre las cuales la Física tiene conocimiento, nos resta hacer mención de las *fuerzas de la naturaleza*, a través de las cuales se mantiene en equilibrio la estructura de las cosas y, por ende, el funcionamiento regular de todos los componentes del Universo. Todos, en alguna oportunidad, hemos posiblemente oído hablar algo sobre la bomba atómica, también sobre centrales atómicas que producen electricidad; pues bien, los procesos que han permitido el estallido de la bomba atómica, así como el funcionamiento de centrales atómicas, han sido logrados después de los planteamientos teóricos de la Física moderna. Estos planteamientos teóricos están basados en los conocimientos que se tienen sobre la existencia de 4 fuerzas en la naturaleza, cuyas interacciones explican por qué las cosas en el Universo se comportan de la manera como las conocemos, normalmente, de una manera profundamente estable, y sólo con procedimientos muy especiales, a nivel del átomo, ha sido posible, entre otros alcances, la producción de la mencionada bomba atómica. Los 4 tipos de fuerzas que producen las interacciones entre todos los componentes del Universo son:

a. La fuerza gravitacional, de acción ilimitada en todo el conjunto del Universo o Cosmos. De una u otra manera nos es familiar, pues mantiene unidos en la Tierra a todos los seres existentes y giramos por su acción alrededor del Sol y, éste, alrededor de la Vía Láctea, a la que pertenecemos, y así sucesivamente en el complejo universal. La fuerza gravitacional ejerce su acción en todos los cuerpos del Universo. Esta fuerza es la más débil de las 4 fuerzas.



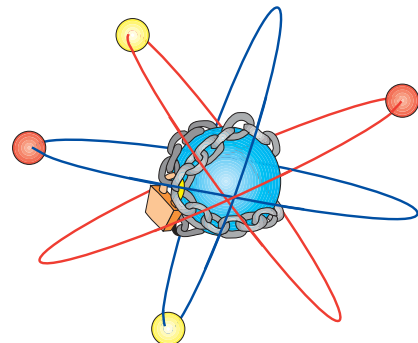
cosas existentes, tanto objetos inertes como seres vivos. La luz es un ejemplo de una interacción electromagnética, así como el calor, las fuerzas de elasticidad y las fuerzas de nuestros músculos. Sin la presencia de la fuerza electromagnética, no sería posible la vida, porque no existiría la cohesión y consistencia de las cosas. El hecho de que objetos como los sólidos: rocas, suelo, árboles, edificios, etc., existan como los conocemos, es por la presencia de la fuerza electromagnética, la cual mantiene un equilibrio totalmente estable de los materiales que forman estos objetos.

b. La fuerza electromagnética, que es una interacción de corto alcance entre los cuerpos eléctricamente cargados. Esta interacción se manifiesta en la atracción o repulsión entre átomos y moléculas, partículas constituyentes de todas las



Las fuerzas electromagnéticas son de atracción cuando se trata de cargas de signos contrarios y de repulsión cuando las cargas son de igual signo.

c. La fuerza fuerte, que es la fuerza que mantiene unido el núcleo del átomo. Esta fuerza es muy grande, pues mantiene la estabilidad de los núcleos atómicos, no obstante estar éstos constituidos por protones, partículas cargadas con carga eléctrica positiva, que sin la acción de esta fuerza fuerte, se repelerían, no permitiendo la estabilidad de la materia y, por ende, de las cosas tanto inertes como vivas de las cuales está formado el Universo.



La llamada fuerza fuerte mantiene unidos a los protones del átomo.

d. La fuerza débil, que es la fuerza que maneja la conversión y desintegración de partículas subatómicas, puede, por ejemplo, convertir protones en neutrones.



3.6 ESCALAS ASCENDENTES DEL TIEMPO

En la escala humana 10^0 , o sea 1 segundo, nos encontramos que con esta unidad de tiempo podemos medir algunas cosas naturales, como la duración de un latido del pulso, lo cual ocurre, aproximadamente, cada 0.95 segundos; podemos mencionar también la longitud que recorre la luz en un segundo en el vacío, la cual es de 299.792.458 m. Esta longitud es equivalente a darle la vuelta a la Tierra alrededor del ecuador 7,5 veces. Puesto que el segundo es una unidad muy pequeña, debemos ascender con rapidez la escala para referir situaciones relevantes del tiempo físico. En la escala de 10^4 s, podemos mencionar, por ejemplo, que el cosmonauta soviético Yuri Gagarín, el 12 de abril de 1961, orbitó la Tierra en una nave espacial, completando 2 vueltas, cada una de las cuales la realizó en 6.480 segundos, o bien, en 1,8 horas.

En la escala de 10^8 s, podemos mencionar que la vida de un perro es de aproximadamente 12 años, lo cual corresponde a $3,78 \cdot 10^8$ s y la misma está dentro del orden de magnitud de 10^8 . En la escala de 10^{10} podemos mencionar el tiempo de revolución del planeta Plutón, el más alejado de los planetas de su centro, el Sol, el cual tarda 247,1 años o $0,779 \cdot 10^{10}$ s en orbitar nuestro astro.

En la escala de 10^{12} s, o sea alrededor de 31.700 años, la Tierra se encontraba en la llamada era glacial y ya el hombre existía sin civilización alguna, aunque se tienen vestigios sobre pinturas rupestres, pinturas y grabados realizados sobre las rocas, y algunas herramientas de piedra y hueso.

En la escala de 10^{16} s, aproximadamente 317

millones de años, podemos mencionar que en la Tierra existían algunos reptiles que comenzaban su evolución a formas nuevas de otros tipos de animales, los cuales aparecieron, aproximadamente, hace 380 millones de años. Así, también, podemos referir que las primeras plantas terrestres aparecieron hace 425 millones de años. Sin embargo, es bueno advertir que antes de estos tiempos ya existía en los mares abundantes formas de vida, tanto vegetales como animales. En la escala de 10^{18} s, aproximadamente 31.700 millones de años, se puede mencionar que la estrella Alfa del Centauro se formó, aproximadamente, para esta fecha.

En la escala de 10^{38} s, o sea $3,17 \cdot 10^{30}$ años, considerada actualmente como la mayor escala de tiempo que tenga algún significado físico, encontramos que el protón, partícula elemental, puede tener un tiempo de existencia aproximadamente igual a la magnitud de esta escala. Con esta escala, terminamos nuestra ascensión por la escala del tiempo y pasamos a un recorrido por la escala descendente a partir, de nuevo, del segundo.



Hace 31.700 años, en la era glacial, el hombre ya existía sin vestigios de civilización alguna.

3.7 ESCALAS DESCENDENTES DEL TIEMPO

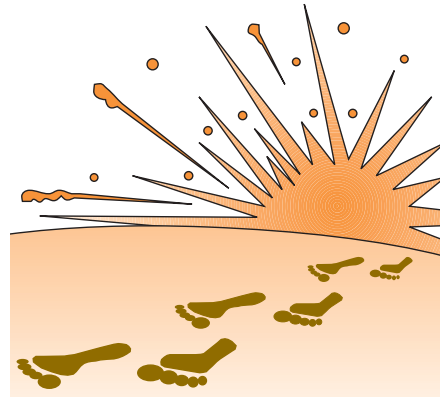
En la escala de 10^{-1} s, la Tierra recorrerá en este tiempo 2,98 km de su órbita alrededor del Sol, a una velocidad de 29,8 km/s, siendo la longitud de la órbita $9,4 \cdot 10^8$ km. Una onda de sonido recorrerá 33,20 m. En la escala de 10^{-4} s, encontramos que la Tierra avanza en su órbita alrededor del Sol, 2,98 m y la luz recorrerá 30 km. En la escala de 10^{-6} la Tierra recorrerá su órbita solo 2,98 milímetros y la luz recorrerá 300 m. En la escala de 10^{-9} s, podemos

mencionar que la luz recorre 30 cm. En la escala de 10^{-12} , la luz recorre 0,3 milímetros.

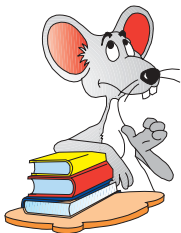
En la escala de 10^{-19} s, la partícula subatómica denominada *mesón eta*, tiene un tiempo de existencia igual al tiempo expresado en esta escala. En la escala de 10^{-23} , la luz sólo puede recorrer el diámetro de un protón, el cual es de 10^{-13} m, o bien avanzar la distancia entre partículas subatómicas, aunque las mismas se encuentren en contacto; por lo tanto, se considera que esta escala del tiempo es el lapso más pequeño en el cual un evento físico puede tener lugar.

Finalmente, se considera que el nacimiento del Universo actual, ocurrió a partir de la denominada gran explosión de una minúscula partícula de materia superdensa, a una inimaginable temperatura, en la cual no existían partículas subatómicas diferenciadas, como el protón o neutrón, menos átomos y ni siquiera la partícula conocida con el nombre de Quark, la cual tiene, en teoría, la propiedad de formar otras partículas subatómicas como los protones y neutrones. Se cree que los Quarks se formaron a los 10^{-43} s después de haber ocurrido la gran explosión y luego de 10^{-4} s, después de la gran explosión, los Quarks iniciaron la formación de los protones y los neutrones.

Con esta última escala, hemos cubierto una amplia gama de las escalas del tiempo del Universo, que han ido desde el extremo ascendente donde se ubica actualmente el tiempo de vida del protón (10^{38} s) hasta el extremo descendente de la escala del tiempo, el intervalo entre la gran explosión o *Big Bang* y la formación de los Quarks (10^{-43} s).



A partir de la gran explosión, surgieron todos los cuerpos celestes del Universo. Pasaron millones de años antes de que surgiera el hombre en la faz de la Tierra.



PIENSA Y EXPLICA



- 3.1 ¿Qué significa la expresión *Escalas del Universo*?
- 3.2 Describe la *Escala Humana* en la concepción de la Física.
- 3.3 ¿Qué significa la expresión *Escalas hacia el Macromundo*?
- 3.4 Describe las distintas escalas hacia el *Macromundo*, en relación con la escala humana.

- 3.5 ¿Qué es un *grupo local* en el contexto descrito en este capítulo?
- 3.6 ¿Qué son las *metagalaxias*? ¿Qué son los *quasars*?
- 3.7 Describe las distintas escalas hacia el *Micromundo*, en relación con la escala humana.
- 3.8 ¿Existen sólo cuatro tipos de fuerza en la naturaleza? ¿Cuáles son?

3.9 ¿Te has preguntado alguna vez por qué los distintos componentes del Universo están en equilibrio? ¿Crees que realmente están en equilibrio? Piensa y cita algunos ejemplos del mundo que te rodea donde parece todo estar equilibrado.

3.10 Describe la acción de la fuerza gravitacional. ¿Es la fuerza gravitacional una fuerza presente en todo el Universo? Explica.

3.11 Describe la fuerza electromagnética, la fuerza débil y la fuerza fuerte que, junto con la fuerza gravitacional, mantienen el Universo en equilibrio.

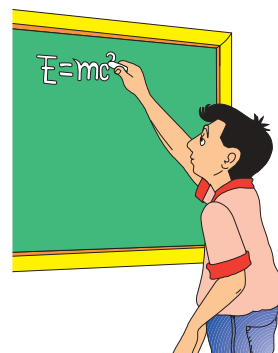
3.12 Describe algunos hechos notables en la vida del hombre, que tienen que ver con las escalas ascendente y descendente del tiempo.

3.13 ¿A qué se ha denominado la *gran explosión* o *Big Bang*?

3.8 EL LENGUAJE MATEMÁTICO COMO MEDIO DE COMUNICACIÓN DE LA FÍSICA

En la sección 2.1 se trató sobre el lenguaje descriptivo, como eje de cualquier información que se quiera transmitir y sobre el lenguaje especializado de la ciencia. Se estableció que la ciencia y, por ende, la Física, utiliza un lenguaje que está compuesto por términos de uso cotidiano y otros que, aun cuando son de uso cotidiano con varios e imprecisos significados en la vida diaria, se les asigna una definición precisa y ajustada al carácter de la ciencia.

Al lado de este lenguaje, imprescindible para expresarse, está el lenguaje de la Matemática, considerado el lenguaje fundamental para expresar los hechos científicos y la forma universal de comunicarse entre sí las personas que hacen ciencia. La Matemática, por otra parte, permite establecer la conexión entre la teoría y el experimento. El físico que se ha propuesto el estudio y explicación de un fenómeno, formula una teoría, la cual se resume en una o varias fórmulas matemáticas. El físico experimental somete a prueba la validez de la teoría, haciendo las pruebas cuantitativas necesarias, como lo indican las fórmulas presentadas en dicha teoría. Los resultados finales confirmarán o rechazarán la validez de la teoría propuesta para explicar el fenómeno estudiado.



El lenguaje fundamental de las ciencias es la Matemática.

Luego que una teoría ha sido plenamente establecida, sus fórmulas matemáticas, por su carácter general, nos permiten hacer mediciones en cualquier instante sobre el desarrollo del fenómeno estudiado en la teoría, con lo cual podemos obtener tantas cantidades sobre las mediciones, como se requieran. Nos permite, por otra parte, establecer con seguridad cómo se comportará el fenómeno en el tiempo. Es decir, la utilización de la Matemática permite predecir el comportamiento de un fenómeno en cualquier instante. Por ejemplo, si decidimos hacer un viaje en automóvil de Puerto La Cruz a Caracas, podemos calcular el tiempo que nos lleva este recorrido, utilizando las fórmulas matemáticas correspondientes, deducidas del estudio físico del movimiento de los cuerpos. Si se decide hacer el mismo recorrido, en sentido inverso, podemos anticipar que nos llevará un tiempo similar en hacerlo, si mantenemos, aproximadamente, los mismos valores de la velocidad. Con este sencillo ejemplo, deducimos que, utilizando la Matemática, podemos predecir el comportamiento de un fenómeno que se repite.

3.9 EL CONCEPTO DE FUNCIÓN. CONSTANTES Y VARIABLES.

En esta sección introduciremos el concepto matemático de *función*, ya que el mismo nos conducirá a otros conceptos relacionados y muy utilizados en la Física, como son las fórmulas y los gráficos. Para llegar de un modo fácil al concepto de función, establezcamos previamente los conceptos de *cantidades variables* y *cantidades constantes*.

Supongamos que alguien decide hacer un viaje en automóvil a la ciudad de Caracas, desde la ciudad de Puerto La Cruz. Se sabe que la distancia entre estas 2 ciudades es, aproximadamente, 320 km. Si se pudiera viajar a una velocidad constante de 100 km/h, el tiempo que tardaría en llegar a la ciudad de Caracas sería de $320 \text{ km} / (100 \text{ km/h}) = 3,20$ horas. Ahora bien, puesto que, por muchas razones, es imposible mantener la velocidad constante de 100 km/h (debe detenerse obligatoriamente en los peajes para pagar el impuesto de uso de la vía, debe bajarse la velocidad por obstáculos en la vía, etc) entonces, el tiempo del viaje no será 3,20 horas, ya que el mismo va a depender del comportamiento de la velocidad: si la velocidad es menor de 100 km/h, el tiempo en recorrer la distancia de 320 km será mayor; en caso contrario, el tiempo será menor.

Si este evento, el viaje a Caracas, tratamos de expresarlo matemáticamente, tenemos 3 cantidades relacionadas, una de las cuales, la distancia, es una *cantidad constante* y las otras 2, la velocidad y el tiempo son *variables*. La relación matemática de estas 3 cantidades se expresa como:

$$d = vt$$

donde d representa el espacio o distancia entre Pto. La Cruz y Caracas, v es la velocidad desarrollada por el auto y t es el tiempo que tarda el automóvil en recorrer la distancia. En el caso que estamos describiendo, no interesan tanto las unidades en que se expresan las cantidades, pues lo importante es mostrar la relaciones matemáticas, reflejadas en cantidades que cuantifican la medición del evento.

En este ejemplo, el tiempo invertido en hacer el recorrido entre las ciudades depende de la velocidad,

siendo, por lo tanto, el tiempo una *variable dependiente*. La velocidad, como se puede ver, no depende ni del tiempo ni del espacio recorrido, Es, por lo tanto, una *variable independiente*. En esta relación $d = vt$, se dice que *el tiempo es función de la velocidad*.

Tomemos otro ejemplo. La longitud de cualquier circunferencia está relacionada con su radio mediante la expresión $l = 2\pi r$. En esta expresión, l es la longitud de la circunferencia y π es la conocida constante, denominada **pi**, de valor aproximado a 3,14. En esta relación, existen 2 cantidades que son variables, l y r . En cambio, π es una constante. Por otra parte, como se puede ver, la longitud l depende de r . Entonces, r es la *variable independiente* y l es la *variable dependiente*; por lo tanto, decimos que l es función de r .

En términos matemáticos, la notación para indicar que una variable y es función de la variable x es: $y = f(x)$. Por supuesto, la función $f(x)$ puede estar constituida por una o más variables. Por ejemplo, la superficie de un rectángulo depende del valor de su base y de su altura. Así que, designando el área con la letra S , la base con b y la altura con h , podemos escribir que $S = f(b, h)$.

Las cantidades constantes son aquellas cuyo valor no cambia durante el tiempo de duración de un experimento o fenómeno físico. Las cantidades variables son aquellas que presentan cambios durante un evento físico.



3.10 FÓRMULAS EN FÍSICA

Puesto que la Física expresa las leyes (explicaremos adelante con detalles el concepto de ley en Física) que explican los fenómenos de la naturaleza en forma de fórmulas matemáticas, es conveniente decir algo acerca de estas expresiones.

Fórmula en la Física es la representación matemática de una ley o de un principio general.

Por ejemplo, la Ley de la Gravitación Universal, establecida por Newton, correspondiente a la atracción que se ejerce mutuamente entre cuerpos siderales (planetas, cometas, estrellas, etc.), se expresa mediante la fórmula:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2}$$

en la cual F es la fuerza de atracción entre las masas, m_1 y m_2 , correspondientes a 2 cuerpos diferentes, d es la distancia entre esas masas y G es una constante universal.

La característica fundamental de toda fórmula es que la misma está conformada por símbolos o letras y es, ni más ni menos, una ecuación literal, es decir una ecuación que, además de las incógnitas, contiene otras letras o símbolos representativos de cantidades conocidas.

Proporcionalidad directa

Se dice que dos cantidades variables son directamente proporcionales cuando, al multiplicar el valor de una de las variables por un número, el valor de la otra variable queda multiplicada por ese número.

Por ejemplo, si un automóvil en marcha lleva una velocidad constante de 50 km/h, en 5 horas recorrerá 5h • 50 km/h = 250 km, en 10 horas recorrerá 500 km, en 12 horas recorrerá 600 km, y así sucesivamente. Por lo tanto, podemos decir, sin ninguna duda, que la variable *espacio recorrido* es directamente proporcional a la variable *tiempo empleado*. El caso inverso también es cierto. Es decir, el tiempo empleado es directamente proporcional al espacio recorrido. En la proporcionalidad directa podemos ver que el *cociente entre las dos variables siempre es una constante*. En el ejemplo citado, tenemos:

$$\frac{250 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 50 \text{ km/h} \quad \frac{500 \text{ km}}{10 \text{ h}} = 50 \text{ km/h}$$

Podemos, entonces, escribir una deducción general sobre este particular:

Si una variable y es proporcional a otra variable x , entonces la relación entre x e y es una constante m ; es decir, $y/x = m$, de donde $y = mx$.

A la constante m en este tipo de relación se le llama *parámetro*, el cual puede tener un valor cualquiera. Esta característica la distingue de las constantes universales o *constantes absolutas* como se les conoce en Física. Por ejemplo, la constante G de la Ley de la Gravitación Universal entre masas de los cuerpos es una *constante absoluta*, ya que mantiene su valor, sea cual fuere la variación de los demás términos de la fórmula donde interviene.

Proporcionalidad inversa

Se dice que dos cantidades variables son inversamente proporcionales, cuando al multiplicar el valor de una de las variables por un número, el valor de la otra variable queda dividido por el mismo número.

Por ejemplo, si 15 personas (obreros y artesanos: carpinteros, albañiles, plomeros, electricistas, etc) pueden construir una casa de 180 m² en 6 meses, al duplicar este personal, la casa será construida en 3 meses, pero si sólo se emplean 10 personas, la casa será construida en 9 meses. Podemos observar, entonces, que la variable *personas empleadas en la construcción de la casa* es inversamente proporcional a la variable *tiempo empleado en la construcción*. Podemos ver también que:

$$15 \text{ personas tardan 6 meses: } 15 \cdot 6 = 90$$

$$30 \text{ personas tardan 3 meses: } 30 \cdot 3 = 90$$

$$10 \text{ personas tardan 9 meses: } 10 \cdot 9 = 90$$

Podemos deducir, entonces, una fórmula para presentar matemáticamente la relación inversa:

Si x e y son las variables y están relacionadas por $yx = m$, entonces $y = m/x$.

Es importante observar que la proporcionalidad sólo

se da entre cantidades variables mutuamente dependientes y nunca se puede dar proporcionalidad entre una variable y una constante, ya que al no existir variación en la constante, ésta no podrá producir una variación en la cantidad variable.

Tomemos nuevamente como ejemplo la fórmula de la fuerza de gravedad de Newton. Esta ley se expresa a través de la fórmula $F = G m_1 m_2 / d^2$ donde G es una constante universal, m_1 y m_2 las masas de dos cuerpos siderales como la Tierra y el Sol y d es la

distancia entre los dos cuerpos considerados. En esta relación, el valor de la cantidad F , es decir la fuerza de atracción entre los dos cuerpos, es proporcional a las masas m_1 y m_2 , si la distancia d entre ambos cuerpos permanece constante, y es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación d entre los dos cuerpos, si las masas no varían. En cualquier caso, la constante G no varía nunca, porque es una constante que mantiene su valor, sea cual fuere la variación de los demás términos de la fórmula.

3.11 ESTRUCTURACIÓN DEL CONOCIMIENTO DE LA FÍSICA: TEORÍAS, PRINCIPIOS, MODELOS Y CONCEPTOS.

La Física: ciencia fundamental.

Para introducir, de alguna manera, el concepto de lo que se entiende por la ciencia Física, diremos, en primer lugar, que el término Física deriva del griego y significa "*naturaleza de las cosas que se mueven por sí mismas*". En concordancia con esta acepción, desde la antigüedad, hasta aproximadamente finales del siglo XVIII, a la Física se le conocía con la denominación general de "*filosofía natural*" y comprendía una ciencia muy amplia, ocupada del estudio integral de las propiedades de los cuerpos y sus interacciones. Para los comienzos del siglo XIX, esta vasta ciencia ya había dado origen a 3 grandes ramas del pensamiento universal: la *Matemática*, las ciencias naturales correspondientes a la *Biología*, la *Botánica* y la *Zoología* y las denominadas *ciencias físicas*, constituidas por la *Geología*, la *Astronomía*, la *Física* y la *Química*, como actualmente se conocen.

La Física, para los inicios del siglo XIX, se había

perfilado como una ciencia dedicada al estudio y medición de los denominados *fenómenos físicos*, entendidos por fenómenos físicos aquellos cambios que se producen en las propiedades de los cuerpos, sin alterar su naturaleza. Entonces, a partir del siglo XIX, la Física había adquirido una vía de desarrollo, restringida al estudio de los fenómenos físicos a través de las siguientes ramas:

La Mecánica: definida como la ciencia que estudia el movimiento de los cuerpos y conformada, a su vez, por las siguientes disciplinas:

Estática: dedicada al estudio de la acción de las fuerzas aplicadas a los cuerpos en estado de reposo o equilibrio.

Cinemática: responsable del estudio de los movimientos de los cuerpos, independientemente de las fuerzas que producen esos movimientos

Dinámica: que trata sobre los movimientos de los cuerpos, tomando en cuenta las fuerzas que producen esos movimientos.



A menudo la Física es considerada la reina de las ciencias.

Es importante aclarar que la Mecánica, como se ha descrito arriba, es la rama de la Física que se ha estudiado y se continúa estudiando, tanto en educación media, como en la mayoría de las universidades, y la misma está clasificada como una *ciencia clásica*, dentro del concepto de Física Clásica, como se ha descrito en otras partes de este libro.

El Calor: rama que estudia las temperaturas y sus medidas y otros temas relacionados, como la medi-

ción de la cantidad de calor, debido a cambios de temperatura, etc.

La Acústica: dedicada al estudio de los movimientos vibratorios o periódicos, generados por las ondas de sonido.

La Óptica: que tiene por objeto el estudio de las propiedades de la luz y la visión.

El Electromagnetismo: rama encargada del estudio de las interacciones entre la corriente eléctrica y el magnetismo.

La Física, como la conocemos actualmente, se encuentra en un proceso de unificación entre los conceptos de la Física Clásica y la Física Moderna, de tal manera que las perspectivas del futuro son las de enseñar la Física como una ciencia única, como un solo bloque de conocimientos.

Finalmente, diremos que la Física, debido a que estudia todo lo relacionado con los componentes de los cuerpos materiales, sus propiedades e interacciones, se une estrechamente con el conocimiento a las demás ciencias como la Biología, la Química, la Geología, la Astronomía, la Matemática, etc; de tal manera que sin una comprensión cabal de esta ciencia, no es comprensible que se puedan explicar científicamente fenómenos de estudio propios de estas otras disciplinas científicas. Por esta razón esencial, a la Física se la considera actualmente como la *ciencia fundamental del conocimiento científico del hombre contemporáneo*.

Fenómeno Físico

En general, se entiende por *fenómeno* cualquier manifestación de actividad que se produce en la naturaleza. Mientras dure la acción de la causa, los cambios en las propiedades se mantienen. Al cesar la causa, los cuerpos adquieren nuevamente, en la mayoría de los casos, las propiedades originales. Los fenómenos pueden tener lugar como hechos cotidianos y no cotidianos, algunos de los cuales presenciamos con frecuencia. No son algo extraordinario. Son fenómenos, por ejemplo, "la caída de la lluvia", "el arco iris", "la ebullición del agua", "la combustión de un cigarrillo", "el crecimiento de las plantas", "la formación de agua a partir de una reacción química entre el elemento Hidrógeno y el elemento



La lluvia es un fenómeno físico.

Oxígeno". Algunos de estos fenómenos citados los estudia la Física; y otros, la Química.

La fusión del hielo, por ejemplo, es un fenómeno físico. El hielo está constituido, como sabemos, por agua en estado de congelación; al derretirse éste, por un aumento de la temperatura, el resultado final sigue siendo el agua. En cambio, la formación del agua, que como sabemos es el producto de la combinación de un volumen de Oxígeno y dos de Hidrógeno, bajo ciertas condiciones de temperatura, es un **fenómeno químico**, puesto que el resultado final, el agua, luego de producirse el fenómeno de la combinación de los elementos mencionados, es totalmente diferente de sus elementos constituyentes.

Hipótesis Científica

Con mucha frecuencia en el estudio de la Física y de otras ciencias, como la Química y la Biología, se utiliza la expresión *hipótesis*. Por esta razón, es importante conocer el significado de este término, para que el estudiante pueda utilizar y aplicar, con propiedad y confianza en el estudio de la Física, estas importantes herramientas del lenguaje.

La palabra hipótesis deriva del idioma griego que significa *suposición*. Etimológicamente, la palabra viene de las expresiones *hipo* que significa bajo y *thesis* que significa posición o situación; es decir, hipótesis significa la suposición o proposición de algo, bien sea esto una cosa, una idea o una conjetura. Dicha

suposición puede ser posible o no posible, siendo su objetivo, en todo caso, obtener de ella una conclusión o consecuencia.

La hipótesis científica es una proposición con sólidos fundamentos para explicar un fenómeno de la naturaleza pero que tiene que ser verificada mediante experimentos.



Veamos un ejemplo. La ecuación $V = 36/P$ expresa que el volumen de un gas cualquiera es inversamente proporcional a la presión aplicada. Si en esta ecuación se dan valores a la variable V , se obtienen valores de P como se muestra en la tabla:

V	12	9	6	5,1	4
P	3	4	6	7	9

Si llevamos estos valores a los ejes de un sistema de coordenadas rectangulares, tomando para V el eje de las ordenadas y para P el eje de las abscisas, obtenemos la gráfica mostrada en la fig. 3.1.

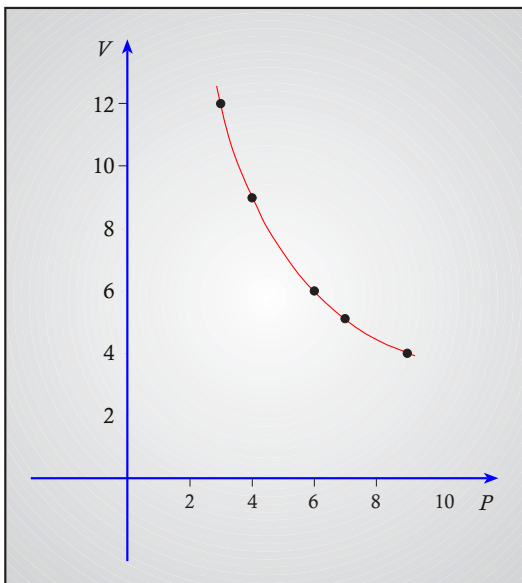


Fig. 3.1 Variación del volumen de un gas con la presión.

La tabla de datos y la gráfica nos muestran cómo el volumen de un gas en un recipiente disminuye al aplicar una presión. La explicación del fenómeno de la reducción del volumen de gas puede hacerse considerando dos aspectos. El primero es que el volumen del gas varía al aplicar una presión sobre el mismo. Esto es evidente. El segundo aspecto a considerar es la causa que permite que el gas pueda reducir su volumen, ya que, por ejemplo, el agua no permite reducir su volumen, aun a altas presiones. Para explicar esto último, recurrimos a una **hipótesis**: "suponemos" que el gas está constituido por moléculas, las cuales no están pegadas una a otras, sino que entre ellas existe cierto espacio y este espacio es el que se reduce al aplicar la presión. En Física, muy a menudo, es indispensable introducir hipótesis para poder explicar los fenómenos o para enlazar entre sí varios fenómenos diferentes.

Las hipótesis deben cumplir con los requisitos de ser sencillas, no estar en contradicción con los hechos y ser verificadas reiteradamente mediante el experimento.



Ley Física

Ley física es toda hipótesis suficientemente comprobada mediante el experimento. Dicho de otra manera, Ley física es una descripción fidedigna de la relación entre todos o algunos de los elementos constitutivos de un fenómeno. Dicha descripción se realiza mediante el lenguaje fundamental de la Física: la Matemática.

Principio

Es una proposición de carácter general, que expresa un aspecto del comportamiento de la naturaleza.



Por ejemplo, el llamado principio de Arquímedes establece que:

"Un cuerpo sumergido total o parcialmente en un fluido es empujado hacia arriba por una fuerza igual en magnitud al peso del volumen del fluido desalojado"

Sobre cuerpos sumergidos en fluidos se pueden formular leyes físicas para la explicación de diversos fenómenos, pero ninguna de las cuales puede violar este Principio de Arquímedes; esto pone de manifiesto que el Principio abarca la totalidad de la parte de la naturaleza sobre la cual está formulado, y la Ley es un enunciado matemático parcial del aspecto de la naturaleza abarcado por el Principio y sin contradicciones con el mismo.

El concepto de Ley Física con frecuencia se asimila al concepto de Principio, sin embargo es necesario tener en cuenta las diferencias enunciadas antes.

Teoría

En general, una Teoría es un conjunto estructurado de definiciones, hipótesis y leyes o principios que explica uno o varios fenómenos de la naturaleza.

La teoría, algunas veces, es relacionada con la idea de que es algo opuesto a la experimentación, al proceso técnico del laboratorio, siendo, por lo tanto, para esta forma de ver la teoría, una tarea o cometido del pensamiento puro. En la ciencia moderna, las teorías son fundamentalmente explicativas, esto quiere decir que las mismas nos informan sobre los hechos, detallándolos e interpretándolos de la manera más exacta posible, a la vez que crean modelos para explicar cómo ocurren tales hechos. Una teoría física que cumpla con estas características, estará en capacidad de hacer predicciones matemáticas con máxima exactitud, lo cual se podrá comprobar con los experimentos. No obstante, aun cuando la teoría haya pasado la prueba de los experimentos, no se puede afirmar con absoluta convicción que la misma sea correcta. Debemos tener muy claro que la teoría no es la explicación definitiva de los fenómenos físicos; sus enunciados son aproximaciones a la realidad. Más aún, a la teoría no se le puede exigir

que explique la esencia del por qué de los fenómenos, pues su papel fundamental es describirlos.

Tomemos, por ejemplo, la Teoría de la Gravitación Universal de Isaac Newton. Esta teoría ha explicado una serie de hechos, entre ellos, el movimiento de los planetas alrededor del Sol y, en general, el movimiento de los cuerpos en el Universo. Sin embargo, esta teoría no tuvo ni podía tener dentro de sus objetivos explicar por qué los cuerpos se atraen entre sí. Por otra parte, los postulados matemáticos de esta teoría no pudieron, modernamente, explicar el movimiento de partículas a nivel atómico, cuando éstas se mueven a velocidades cercanas a la velocidad de la luz. Fue necesaria la aparición de la Teoría de la Relatividad para explicar éste y otros hechos relacionados con el movimiento de los cuerpos a grandes velocidades. Esto confirma que las teorías son siempre tentativas de explicación de los fenómenos. Para finalizar, queremos dejar claro, que aun cuando parezca contradictorio, el hecho de que la ciencia física es un conjunto de principios, teorías e hipótesis para explicar, de una manera racional el mundo, las teorías no son actos creativos racionales, sino más bien actos creativos semejantes a los de los artistas, escritores y músicos; esto último lo dijo el sabio Albert Einstein. Esta manera de crear teorías, es lo que permite avanzar por encima del conocimiento establecido; su creatividad está relacionada con los conceptos de la estética como la belleza, la armonía, la simplicidad y la forma elegante de exponer el contenido matemático.

Modelos

Hemos dicho que, luego de establecida una teoría para explicar un fenómeno, la misma, normalmente, se resume en fórmulas matemáticas. La utilización de fórmulas matemáticas permite, entre otras cosas, predecir el comportamiento del fenómeno en cualquier instante. Esta característica del lenguaje matemático, utilizado por la Física, es la que da pie a considerar que el contenido de la teoría, el cual explica un fenómeno cualquiera, no es otra cosa que un modelo que describe el comportamiento y desarrollo del fenómeno. *La teoría o su resumen, la fórmula matemática, nos describe siempre un modelo ideal.* Esto es muy importante entenderlo así.

Supongamos que estamos presenciando un partido de fútbol; el guardameta de uno de los equipos hace

un saque, dándole a la pelota con el pie, desde la portería. Para mayor claridad, supondremos que la pelota cae finalmente y, en forma libre, sobre el terreno del equipo contrario. Si queremos describir el movimiento de la pelota en relación, principalmente, a la forma de la trayectoria, apelamos a una teoría física existente; en este caso, la Física nos informa que la teoría de Galileo sobre el movimiento de los proyectiles puede servirnos para estudiar y predecir el movimiento de la pelota. He aquí la importancia de comprender con claridad lo que son los modelos físicos. La teoría de Galileo, mediante fórmulas matemáticas, describe el movimiento de un proyectil ideal, sin tamaño ni forma, donde la resistencia del aire al movimiento del proyectil es mínima. La teoría, en síntesis, se aplica a un objeto ideal, no al objeto real que, en el ejemplo mencionado antes, es el balón; sin embargo, al hacer los cálculos del movimiento del balón, basados en la teoría de Galileo del movimiento del proyectil, resulta que dichos cálculos describen el movimiento real del balón con bastante exactitud. Por lo tanto, podemos concluir que un objeto puntual disparado como un proyectil es un *modelo* muy bueno del movimiento que describe un balón al ser golpeado con el pie por el guardameta de un equipo de fútbol.



Es importante aclarar que, así como ninguna teoría científica es definitiva, ningún modelo físico propuesto para describir un fenómeno físico es estático y definitivo. El conocimiento de las cosas asciende en forma asintótica, sin tocar el conocimiento final; así como la verdad definitiva está ausente de toda teoría, igualmente lo está de todo modelo.

Conceptos

El concepto, en general, se puede describir diciendo que es una idea abstracta o pensamiento expresado con palabras. Por ejemplo, tenemos una idea o pensamiento de lo que son el arte y la poesía; es decir, tenemos un concepto de lo que es el arte, lo que es la poesía, pero estos conceptos no podemos definirlos en forma precisa, ya que no se tienen otros

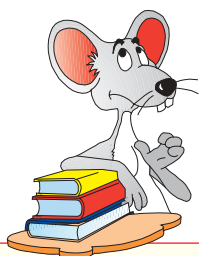
En relación a la Física, los conceptos se tienen también como ideas abstractas o ideas intuitivas; es decir, son ideas que no son el resultado de un razonamiento y que sólo pueden admitir una definición del tipo operacional. Esto es, se pueden definir en base a un procedimiento para medirlas.



elementos más simples a los cuales los podamos referir para explicarlos.

Tomemos, por ejemplo, el tiempo. Es imposible dar una definición exacta del tiempo porque, sencillamente, no se tienen partes del mismo que se puedan utilizar para definirlo. Sin embargo, lo podemos definir utilizando un reloj para medirlo. Cuando decimos que un viaje por vía terrestre de Barcelona a Caracas se lleva un tiempo de cuatro horas, medido con un reloj, estamos definiendo con esto el tiempo en el cual se produce dicho viaje.

En la Física, palabras como espacio, longitud, masa, fuerza, temperatura, son también conceptos como el caso del tiempo; podemos definir la temperatura por la lectura que hagamos utilizando un termómetro patrón; al espacio podemos definirlo como un conjunto de puntos abstractos, los cuales pueden ser localizados a partir de un punto de referencia, mediante tres ejes ilimitados en su longitud, asignándole, según sea requerido para la ubicación de un punto o puntos en particular, *números de posición*. Estos números de posición se denominan *coordenadas*. Estas definiciones operacionales normalmente adquieren mayor grado de aceptación, por la sensación que experimentamos al tratar con ellas; por ejemplo, el concepto de masa lo asociamos a algo que pesa, la fuerza a un acto de halar o empujar, la temperatura a la sensación de frío o de calor.



PIENSA Y EXPLICA



3.14 ¿Cuál es la diferencia entre el lenguaje cotidiano y el lenguaje de la Física?

3.15 ¿Por qué la Matemática se considera una especie de lenguaje preciso? ¿Qué importancia tiene su uso en la Física?

3.16 ¿Qué son cantidades variables y cantidades constantes?

3.17 Describe variables dependientes e independientes en relación con el concepto de velocidad uniforme. Asimismo, explica por qué la relación $v = d/t$, puede ser considerada como una función.

3.18 ¿Para qué se utilizan las fórmulas en la Física?

3.19 Describe lo que es proporcionalidad directa y proporcionalidad inversa en una fórmula.

3.20 ¿Qué curvas originan la representación gráfica de las funciones lineales y de las funciones cuadráticas?

3.21 ¿Cuál fue el concepto inicial de la Física? ¿Por qué se le denominó *filosofía natural*? ¿A qué ramas de la ciencia dio origen la Física al comenzar el siglo XIX?

3.22 ¿Qué ramas de la Física se desarrollaron en forma vigorosa a comienzos del siglo XIX? ¿Por cuáles disciplinas estaba conformada la mecánica?

3.23 Describe qué es un fenómeno físico.

3.24 ¿Por qué la fusión del hielo es un fenómeno físico, mientras que la formación del agua es un fenómeno químico?

3.25 ¿Qué es una hipótesis científica y qué requisitos debe cumplir la misma?

3.26 ¿Qué es un modelo, en el contexto de la descripción de un fenómeno físico? ¿Por qué se dice que ningún modelo es estático o definitivo?

3.27 Define ley, principio, concepto y teoría cuando se aplican a la Física. ¿Cuál es la diferencia entre principio y ley física?

CAPÍTULO 4

El Movimiento



El presente capítulo trata sobre el movimiento, entendido éste como la relación entre la posición de un cuerpo y el tiempo que tardó en ocuparla. Se inicia con la necesidad de fijar un sistema de referencia para establecer la condición de movimiento de un cuerpo. Se define, de forma inductiva, el concepto de trayectoria y su dependencia con el observador. Se hace la diferencia entre rotación y traslación de un cuerpo rígido. Se introduce el concepto de partícula, como medio que facilita el estudio de la realidad física. A continuación, se definen los conceptos fundamentales (posición, desplazamiento, velocidad y aceleración) para el análisis cinemático de un movimiento en el marco tridimensional y haciendo uso de los vectores en forma analítica.

4.1 EL MOVIMIENTO

En relación al movimiento, podemos decir que todo el mundo tiene una idea común de lo que significa esta palabra, entre otras cosas porque el movimiento lo experimentamos continuamente. Es decir, nosotros mismos nos movemos permanentemente. Por otra parte, vemos que casi todo se mueve. Vemos moverse a los animales, los automóviles son máquinas hechas para el movimiento, se mueven los árboles con la fuerza del viento, las aguas del mar están en continuo movimiento, la Tierra se mueve sobre su eje y, a la vez, alrededor del Sol, el Sol y los planetas se mueven en torno al centro del sistema estelar de la galaxia la Vía Láctea.

A nivel de las cosas muy pequeñas, al nivel del micromundo, existen movimientos que no podemos captar directamente, pero su existencia se pone de manifiesto por los fenómenos que producen, conocidos y descritos en la Física, como se verá más adelante. Se trata, entre otros, del movimiento de los electrones que en un conductor, bajo la acción de una tensión eléctrica, genera un flujo de corriente capaz de producir calor, como ocurre con las conocidas planchas, utilizadas para planchar nuestra ropa. También, ese calor puede producir luz, efecto que se logra a través de los bombillos de alumbrado, o producir, en unión con campos magnéticos, esfuerzos mecánicos de rotación, como es el caso de motores eléctricos, entre los cuales se tienen los cotidianos ventiladores de mesa, lavadoras, aspiradoras, etc. Cosas en movimiento como las mencionadas y, muchísimas más, son parte del amplio horizonte del continuo movimiento de las cosas existentes, tanto en nuestro mundo, como en el espacio infinito que nos rodea.

La parte de la Física que se dedica al estudio del movimiento de las cosas o movimiento de los cuerpos es la *Mecánica*, conocida como *la ciencia que estudia el movimiento de los cuerpos*. La Mecánica está considerada como la rama más antigua de la Física. La Mecánica comprende las siguientes disciplinas:

Cinemática: responsable del estudio de los movimientos de los cuerpos, independiente-

mente de las fuerzas que producen esos movimientos.

Estática: dedicada al estudio de la acción de las fuerzas aplicadas a los cuerpos en estado de reposo o equilibrio.

Dinámica: que trata sobre los movimientos de los cuerpos, tomando en cuenta las fuerzas que producen esos movimientos.

4.2 SISTEMAS DE REFERENCIA

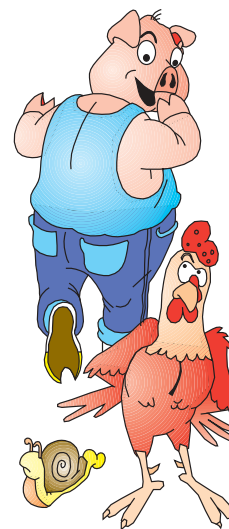
Los sistemas de referencia fueron mencionados en el capítulo 2. En este punto, sólo se tratará de utilizar los conocimientos adquiridos con miras hacia aplicaciones prácticas, para lograr un manejo adecuado de este importante tema. Como un ejercicio recordatorio, diremos que el *Sistema de Referencia* parte del concepto del *movimiento de los cuerpos*, que en Física se entiende como el *cambio de posición de unos cuerpos en relación a otros*. De acuerdo con este concepto, al tratar de describir correctamente, desde el punto de vista de la Física, el cambio de posición de un cuerpo o, equivalentemente, el movimiento de un cuerpo, forzosamente tenemos que referirlo a algo, bien sea a otro cuerpo o, más comúnmente, a un punto que puede estar en reposo o en movimiento. Físicamente, no está bien descrito un movimiento, si el mismo no está referido a otro cuerpo o a un punto de referencia. Por ejemplo, cuando alguien dice: "hoy recorrí en mi auto 5 km", la descripción de ese movimiento es incompleta, ya que no describe dónde se inició y hacia dónde se dirige ese movimiento.

En Física, el cuerpo o punto al cual debemos referirnos, cuando describimos el movimiento de un cuerpo, se conoce como *marco de referencia* o, más frecuentemente, *sistema de referencia*. El hecho que la descripción correcta del movimiento de un cuerpo, bien sea en el espacio de tres dimensiones, de dos dimensiones o en una sola dimensión, sólo sea posible hacerla en relación a un sistema de referencia, nos lleva directamente a aceptar que *el movimiento es relativo*, que tiene sentido describirlo únicamente con relación a algo.

El término *relativo* no es ninguna palabra misteriosa, ni producto del capricho de alguien. Relativo quiere

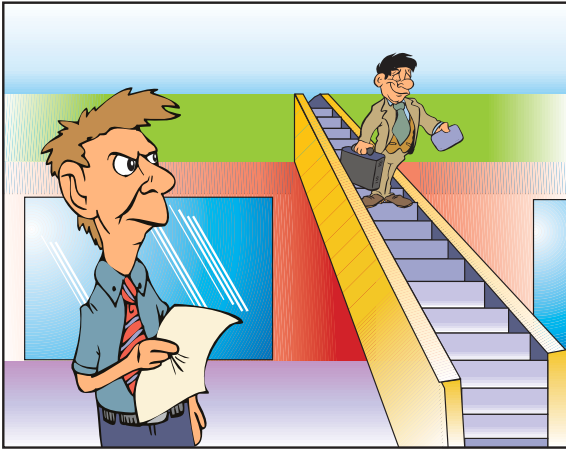
decir, simplemente, que tiene relación con algo, que no es absoluto, que depende de otra cosa. Para reafirmar el significado de la expresión "*relativo*", considera la siguiente pregunta: una pelota de fútbol, ¿es grande o es pequeña? Si se piensa detenidamente sobre el contenido de la pregunta, se notará de inmediato que es imposible dar una respuesta, tal como está formulada, ya que la pelota es extremadamente grande con relación al tamaño de una partícula sub-atómica, como el electrón y, en cambio, es inmensamente pequeña con relación al tamaño del Sol.

Así, podemos concluir, categóricamente, que la pregunta en referencia sólo tiene sentido si la relacionamos con algo. Es decir, una pelota de fútbol es grande o es pequeña con relación al tamaño de otra cosa. Podemos deducir, también, de este ejemplo, que el tamaño de las cosas es un concepto relativo. Es bueno aclarar que no todo en la Física es relativo. Por ejemplo, la velocidad de la luz es un valor absoluto, ya que la misma se mantiene constante e independiente del estado de reposo o movimiento del cuerpo que la emite.



El tamaño de un objeto es relativo: puede resultar grande cuando se compara con un determinado cuerpo, pero muy pequeño cuando se compara con otro.

Como ejemplo instructivo adicional para darnos cuenta de la necesidad de establecer un sistema de referencia, con el fin de poder describir correctamente el movimiento de un cuerpo, tomemos el caso del movimiento descendente de una persona en una escalera mecánica. La persona entra a la escalera, que está en movimiento y se ubica sobre un peldaño de la misma. Otra persona, parada en el piso, observa a la persona que descende y dice que está en movimiento. Sin embargo, la persona de la escalera afirma que ella está en reposo, porque está efectivamente en el peldaño y no se mueve de allí. Podemos preguntarnos ¿Quién tiene la razón? Desde el punto de vista de la Física, ambas personas tienen razón. La persona que está parada en el piso, cuando



La persona que desciende en la escalera mecánica, está en reposo con respecto al peldaño que ocupa. Sin embargo, el observador la ve moviéndose, con respecto a su posición.

afirma que la persona de la escalera se está moviendo, lo hace porque está tomando como sistema de referencia, sin decirlo, el punto donde está parado. La persona de la escalera, cuando afirma que no se mueve, es porque ha tomado como punto de referencia el peldaño donde está ubicada. La conclusión es que ambas personas describen el movimiento correctamente, desde su propio sistema de referencia.

Observa que el marco de referencia determina quién está en reposo y quién está en movimiento. La persona que está en la escalera, vista desde el marco de referencia de la persona que está parada en el piso, se está moviendo; pero la persona que está en el peldaño de la escalera, vista de su marco de referencia, el peldaño, está en reposo, ya que no se mueve de ese peldaño.

El sistema de referencia puede ser un punto fijo, caso de la persona que está fuera de la escalera, o bien un punto que se mueve, caso de la persona que está en la escalera. Hay que tener en cuenta que, luego de elegir el marco de referencia, éste se considera fijo para la persona que desde él va a describir un movimiento.

4.3 SISTEMAS DE COORDENADAS

En el capítulo 2 estudiamos varios sistemas de coordenadas. De estos, el sistema de coordenadas rectangulares o sistema de coordenadas cartesianas,

llamado así en honor al filósofo, matemático y físico francés, René Descartes, es el más utilizado por su sencillez para determinar la posición de los cuerpos en el espacio. En segundo lugar, estudiamos el sistema de coordenadas polares, el cual es muy útil para ubicar un punto en el espacio, cuando conocemos el radio que une el origen de coordenadas con el punto y el ángulo de ese radio con el eje positivo de las abscisas o eje de las X.

Luego de fijar el marco o sistema de referencia, cuando vamos a describir un movimiento, le asociamos un sistema de coordenadas. En el caso de las coordenadas cartesianas, el sistema puede ser tridimensional, si el cuerpo se encuentra en el espacio de tres dimensiones; bidimensional, si el cuerpo está ubicado en un plano de dos dimensiones y unidimensional si al cuerpo lo suponemos sobre una línea recta. También, podemos utilizar un sistema de coordenadas polares, si el cuerpo está sobre un plano y disponemos de los datos que nos permitan utilizar este sistema. Utilizando, según sea el caso, cualquiera de los sistemas de coordenadas mencionados, podemos ubicar cualquier cuerpo, calculando sus respectivas coordenadas.

Ejemplo 4.1

Un niño eleva un papagayo en un terreno plano, como se muestra en la figura 4.1. La longitud de la cuerda de elevación del papagayo es de 20 m. Se requiere calcular las coordenadas de ubicación del papagayo asumiendo lo siguiente: el marco de referencia se ubica en la mano del niño, con el brazo extendido, cuando tensa la cuerda en el proceso de elevación del papagayo. El sistema de coordenadas asociado será tridimensional, por volar el papagayo en un espacio de tres dimensiones y tendrá su origen en la mano del niño. El ángulo de elevación, en un momento dado, entre el punto donde se encuentra el papagayo y el punto del plano horizontal, a nivel de la mano con el brazo extendido del niño es de 60° y el ángulo de la proyección de la cuerda sobre el plano en referencia con el eje de las X, es de 45° . Con el objeto de facilitar los cálculos, supondremos que el niño se sitúa en una de las esquinas del terreno, de acuerdo con la orientación del viento.

Solución

Haciendo uso de las funciones trigonométricas

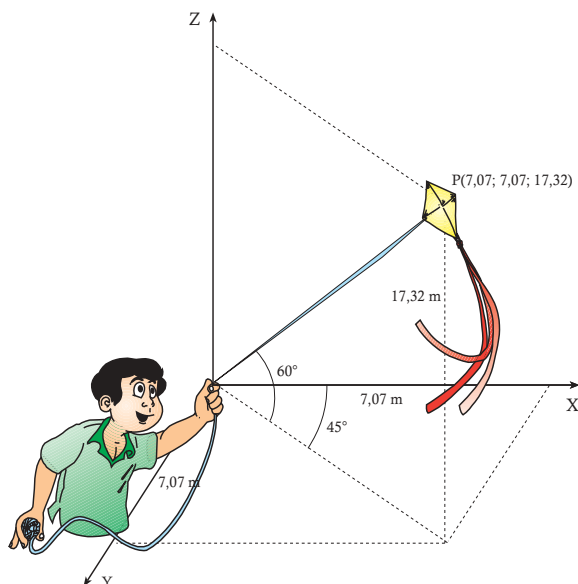


Fig. 4.1 Ejemplo 4.1.

descritas en el capítulo 3, se tiene:

- a. Cálculo de la coordenada z o altura del papagayo sobre el plano X - Y :

$$\operatorname{sen} 60^\circ = \frac{z}{r} \Rightarrow z = r \operatorname{sen} 60^\circ$$

$$z = 20 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ m}$$

- b. Cálculo de la proyección de la cuerda sobre el plano X - Y :

$$\cos 60^\circ = \frac{P}{r} \Rightarrow P = r \cos 60^\circ$$

$$P = 20 \cdot 0,50 = 10 \text{ m}$$

- c. Cálculo de la abscisa x . Como sabemos que la proyección P forma un ángulo de 45° con el eje X , podemos entonces calcular x . Así tenemos:

$$\cos 45^\circ = \frac{x}{P} \Rightarrow x = P \cos 45^\circ$$

$$x = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ m}$$

- d. Cálculo de la ordenada y :

$$\operatorname{sen} 45^\circ = \frac{y}{P} \Rightarrow y = P \operatorname{sen} 45^\circ$$

$$y = 10 \cdot 0,707 = 7,07 \text{ m}$$

Las coordenadas del papagayo son, entonces: 7,07 m, 7,07 m y 17,32 m o, bien, como se expresa comúnmente:

$$P(7,07 \text{ m}; 7,07 \text{ m}; 17,32 \text{ m})$$

Ejemplo 4.2

Supongamos que el viento dejó de soplar y el papagayo cae al suelo. Si proyectamos el marco de referencia a nivel del piso, al igual que el sistema de coordenadas y consideramos que la cuerda forma un ángulo de 30° con el eje de las X , como se muestra en la figura 4.2, se pide calcular las coordenadas del papagayo en estas condiciones.

Solución

En este caso, el marco de referencia lo trasladamos a los pies del niño y, como el papagayo descansa en el piso, en un plano, adoptamos un sistema de coordenadas bidimensional, porque se trata de calcular coordenadas en un plano.

En los cálculos a realizar haremos uso de las funciones trigonométricas. Se tiene:

- a. Cálculo de la abscisa x :

$$\cos 30^\circ = \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos 30^\circ = 20 \cdot 0,866 = 17,32 \text{ m}$$

- b. Cálculo de la ordenada y

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \operatorname{sen} 30^\circ = 20 \cdot 0,5 = 10 \text{ m}$$

Las coordenadas del papagayo, fig. 4.2(b), son, entonces:

$$P(17,32 \text{ m}, 10,00 \text{ m})$$

Ejemplo 4.3

Si el papagayo con su cuerda cae al suelo sobre el eje X , como se muestra en la figura 4.3, calcula sus coordenadas.

Solución

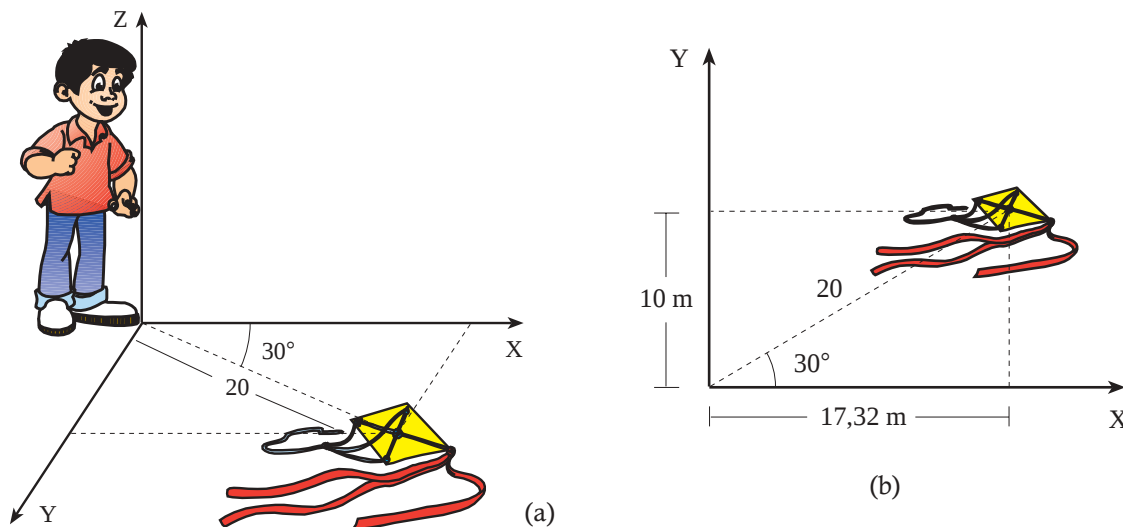


Fig. 4.2 Ejemplo 4.2.

En este caso, el sistema de coordenadas a considerar será en una sola dimensión, porque podemos asumir que el papagayo descansa sobre el eje X en un espacio unidimensional. La coordenada, en este caso, será la longitud de la cuerda sobre el eje X. Es decir, la coordenada del papagayo es:

$$P(20)$$

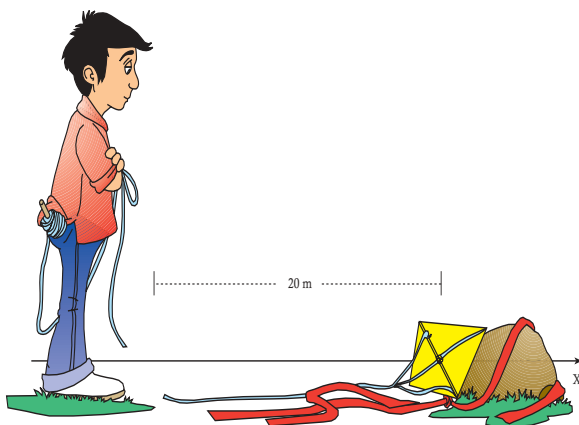


Fig. 4.3 Ejemplo 4.3.

4.4 MOVIMIENTOS COMPLEJOS. CUERPOS RÍGIDOS.

En la naturaleza, el movimiento de los cuerpos es, con mucha frecuencia, complejo; es decir, un cuerpo puede tener, simultáneamente, movimientos de rotación y traslación. Por ejemplo, cuando se lanza una bola de bowling, la misma desarrolla, simultáneamente, dos movimientos, uno de rotación y otro de traslación. Para facilitar el estudio de estos movimientos complejos, la Física los descompone en sus movimientos componentes, que son el *movimiento de traslación* y el *movimiento de rotación*.

En este texto, cuando hablemos de movimiento de los cuerpos, nos referiremos siempre al movimiento de *cuerpos rígidos*, entendiendo por tales aquellos en los cuales la distancia entre sus partículas constitutivas se mantienen fijas. Este concepto es un modelo idealizado, ya que en la naturaleza no existen cuerpos absolutamente rígidos, puesto que todos son deformables en alguna medida; sin embargo, el modelo de cuerpo rígido es conveniente porque simplifica el análisis físico del movimiento de los cuerpos, especialmente el movimiento de rotación, como se verá en el capítulo correspondiente a este tema.

Un cuerpo rígido es aquél en el cual la distancia entre las partículas que lo constituyen se mantienen fijas.

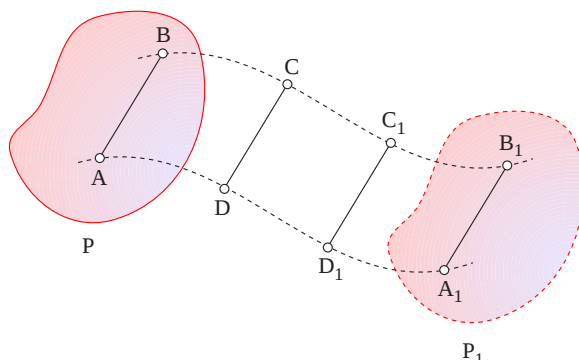


Fig. 4.4 En un movimiento de traslación puro, ninguna parte del cuerpo rota. Al moverse el cuerpo de la posición P a la posición P_1 , los puntos A y B describen trayectorias paralelas.

4.4.1 Movimiento de traslación

El movimiento de traslación de un cuerpo rígido es aquél movimiento que no origina rotaciones, lo cual significa que si en la parte interna del cuerpo ubicamos dos puntos A y B y los unimos mediante una semirecta, esta semirecta permanecerá paralela a sí misma, cuando el cuerpo se mueva a cualquier posición, tal como se puede ver en la fig. 4.4. Si marcamos las trayectorias de los puntos A y B desde una posición inicial a una nueva posición A_1B_1 , dichas trayectorias mantienen la misma separación. Es decir, en cualesquiera puntos de las trayectorias, la longitud de las semirectas son iguales. Adicionalmente, cabe señalar que todos los puntos del cuerpo en traslación mantienen la misma velocidad y que la traslación puede ser en línea recta o curva, como se muestra en las figs. 4.5(a) y 4.5(b).

4.4.2 Movimiento de rotación

En contraposición al movimiento de traslación, un cuerpo realiza un movimiento de rotación, si la línea

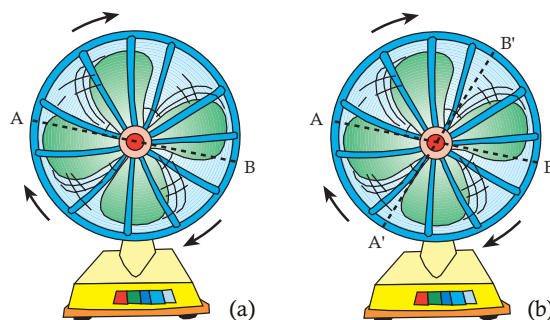


Fig. 4.6 Movimiento de rotación. Obsérvese que, al girar la rueda, la línea trazada entre los puntos A y B no sigue una trayectoria paralela a sí misma. Es decir, los segmentos de recta AB y $A'B'$ no son paralelos.

trazada entre dos puntos internos del cuerpo no permanece paralela a sí misma, cuando el cuerpo se mueve. La fig. 4.6 muestra el aspa de un ventilador, cuyo movimiento representa un movimiento rotatorio o de giro.

4.5 DEFINICIÓN DE PARTÍCULA

Cuando se analiza el movimiento de un cuerpo, es posible que el mismo desarrolle internamente un conjunto de movimientos complejos. Por ejemplo, en un automóvil tienen lugar movimientos internos como el movimiento del ventilador del motor, el movimiento interno propio del motor, el de sus ruedas, etc. Al analizar el movimiento del automóvil, la Física considera que no es necesario analizar todos sus movimientos internos, si sólo interesa el movimiento del automóvil como un todo. En este caso, debemos considerar o modelar el automóvil como una *partícula*, como un objeto puntual.

El concepto de partícula se puede aplicar a cualquier cuerpo físico de la naturaleza y a cualquier cuerpo

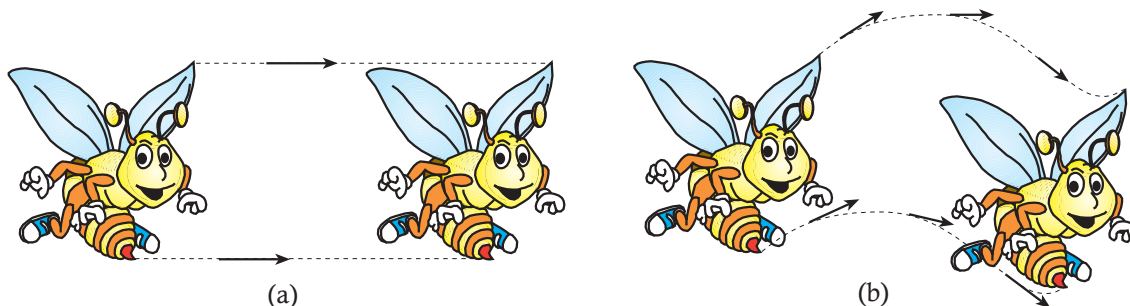


Fig. 4.5 El movimiento de traslación puede ser: a) En línea recta. b) En línea curva.

creado por el hombre. En este orden de ideas, puede considerarse a la Tierra como una partícula en su movimiento alrededor del Sol. Igualmente, el Sol puede tratarse como una partícula en relación a nuestra galaxia, la Vía Láctea y así sucesivamente. Debemos aclarar, no obstante, que si se está analizando al Sol como un cuerpo celeste, con los movimientos internos de su masa incandescente, no podemos considerarlo como una partícula, sino en su verdadera dimensión.

En Física se concibe a una partícula como un objeto sin dimensiones ni forma, similar a un punto geométrico.

4.6 TRAYECTORIA

Todo cuerpo en estado de movimiento recibe en general el nombre de *móvil* y la línea imaginaria descrita al cambiar de posición en el tiempo, se denomina *trayectoria*. Si utilizamos un sistema de coordenadas rectangulares en tres dimensiones, podemos decir que la trayectoria de un cuerpo que se mueve en el espacio queda identificada, si en cada momento de tiempo, t , podemos indicar la posición del cuerpo o partícula a través de sus coordenadas x , y , y z . Si la posición del cuerpo o partícula la determinamos con las coordenadas $x = x_1$, $y = 0$ y $z = 0$, en un tiempo específico, tenemos el caso de una trayectoria rectilínea. Es decir, el movimiento se realiza en un *espacio unidimensional*, tal como se muestra en la figura 4.7(a). Si las coordenadas x y y son distintas de cero ($x = x_1$, $y = y_1$) y $z = 0$, el movimiento se realiza en un *espacio bidimensional*, ver figura 4.7(b). Finalmente, si las coordenadas x , y y z

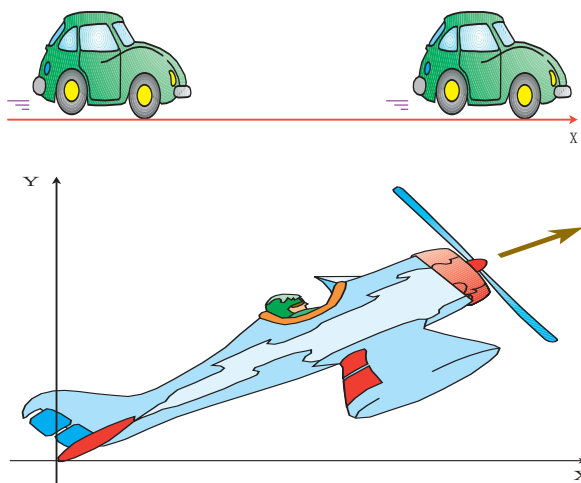


Fig. 4.7 Movimientos: a) Unidimensional. b) Bidimensional. c) Tridimensional. En los casos (b) y (c), la trayectoria puede ser rectilínea o curvilínea.

están expresadas por números distintos de cero, el movimiento tiene lugar en un *espacio tridimensional*, figura 4.7(c). En esos dos últimos casos, las trayectorias pueden ser rectilíneas o curvilíneas.

Puesto que para poder describir la trayectoria de un cuerpo en movimiento es absolutamente necesario utilizar un marco de referencia con un sistema de coordenadas asociado, tenemos que admitir que la trayectoria del movimiento de un cuerpo tiene un *carácter relativo*, al igual que el movimiento mismo, tal como se ha explicado anteriormente. Esto significa que la forma geométrica de la trayectoria dependerá del marco de referencia desde donde se visualice ésta. Por ejemplo, refiriéndonos a la figura 4.8(a), si una persona sentada en un vagón de un

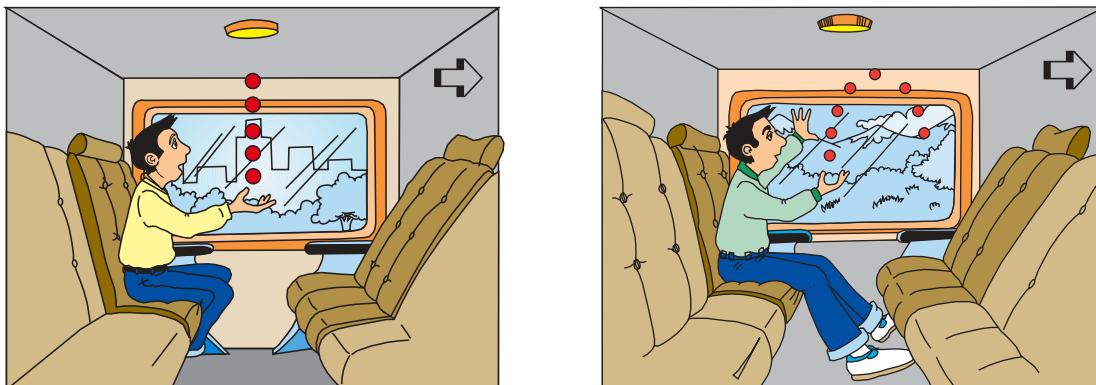
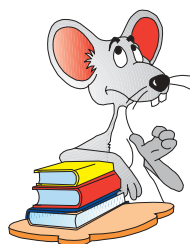


Fig. 4.8 a) El hombre sentado en el tren lanza una pelota hacia arriba y la ve caer en línea recta. b) Otra persona, parada frente a la ventana, verá que la pelota describe una trayectoria curva al subir y al bajar. Todo depende, entonces, del marco de referencia.

ferrocarril, con amplias ventanas, y que se mueve a muy baja velocidad, lanza una pequeña pelota hacia el techo, sin que la misma lo toque, la pelota ascenderá y caerá en línea recta sobre sus manos; pero una persona parada en la acera, fig. 4.4 (b), que observa el movimiento de la pelota, verá que la trayectoria hacia el techo es una curva, al igual que la trayectoria del descenso. En el primer caso, el

movimiento de la pelota es observado desde el vagón como marco de referencia; la persona ve, entonces, que la forma de la trayectoria es una línea recta vertical; en el segundo caso, el movimiento de la pelota es observado desde el marco de referencia de la persona parada en la acera, y la misma ve la trayectoria de la pelota como una parábola.



PIENSA Y EXPLICA



4.1 ¿Cómo podrías definir el movimiento? Da ejemplos de movimiento en el macromundo y en el micromundo.

4.2 ¿Qué parte de la Física estudia el movimiento? ¿Qué disciplinas comprende esta rama de la Física?

4.3 ¿Por qué se dice que el movimiento es relativo? ¿Es el tamaño de un cuerpo una cantidad relativa? ¿Por qué?

4.4 Describe la relatividad del movimiento en el caso de una persona que asciende por una escalera mecánica y de otra que lo observa, desde el suelo, ascendiendo por la misma.

4.5 ¿Es el marco de referencia fijo?

4.6 ¿Por qué es importante asignar un sistema de coordenadas a un objeto?

4.7 ¿A qué nos referimos cuando decimos que un movimiento es complejo?

4.8 ¿Qué es un cuerpo rígido? ¿Es un cuerpo rígido un objeto ideal? ¿Por qué?

4.9 ¿Cuándo se dice que un objeto realiza un movimiento de traslación? Haz referencia a la fig. 4.4.

4.10 ¿Qué tipos de movimiento de traslación puedes citar? Refiérete a la fig. 4.5.

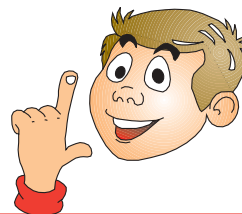
4.11 ¿Cuándo se dice que un objeto tiene un movimiento de rotación? Refiérete a la fig. 4.6 para explicar.

4.12 ¿Cuál es el concepto de partícula en Física? ¿Es este un concepto relativo?

4.13 Define qué es trayectoria y cómo esta puede dividirse, de acuerdo al movimiento, en distintas dimensiones.



PROBLEMAS



4.14 Determina las coordenadas de los puntos señalados en las figuras 4.9 a 4.11.

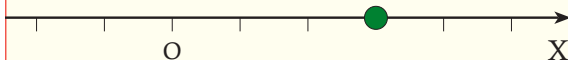


Fig. 4.9 Problema 4.1(a).

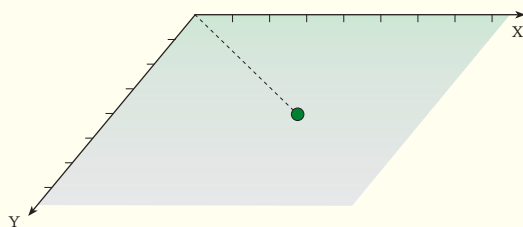


Fig. 4.10 Problema 4.1(b).

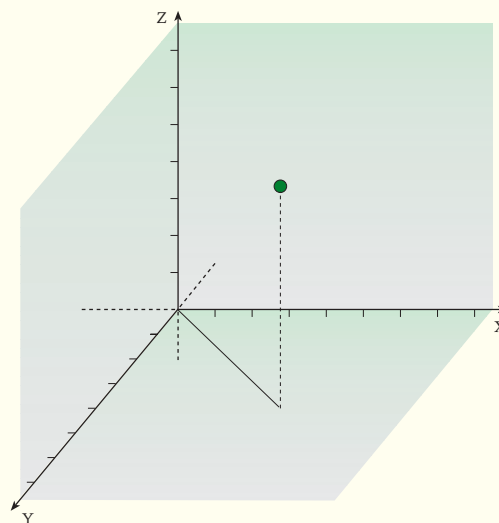


Fig. 4.11 Problema 4.1(c).

4.2 ¿Cuáles son las proyecciones horizontal y vertical del segmento de recta entre los dos puntos mostrados en la fig. 4.12?

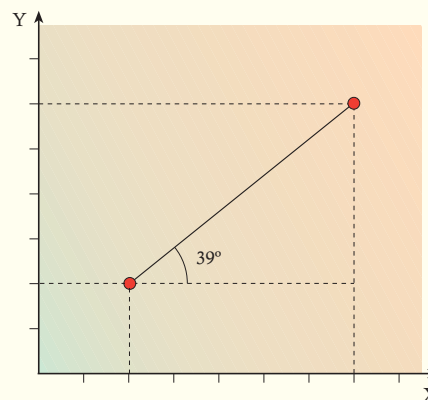


Fig. 4.12 Problema 4.2.

4.7 ALGO SOBRE VECTORES

El propósito de esta sección es hacer un repaso acerca de lo aprendido sobre *vectores* y *escalares* en los cursos de Matemática, para entender con claridad la necesidad de aplicar estos conceptos al estudio del movimiento de los cuerpos o partículas, desde el punto de vista de la Física.

La fig. 4.13 representa dos bicicletas, A y B, en movimiento por una calle recta cualquiera. Si, en un momento dado, queremos saber la posición de las bicicletas y la separación entre ellas, debemos necesariamente establecer un marco o punto de referencia, tal como lo hemos estudiado anteriormente, y asociar al mismo, un sistema de coordenadas. Por tratarse del movimiento de las

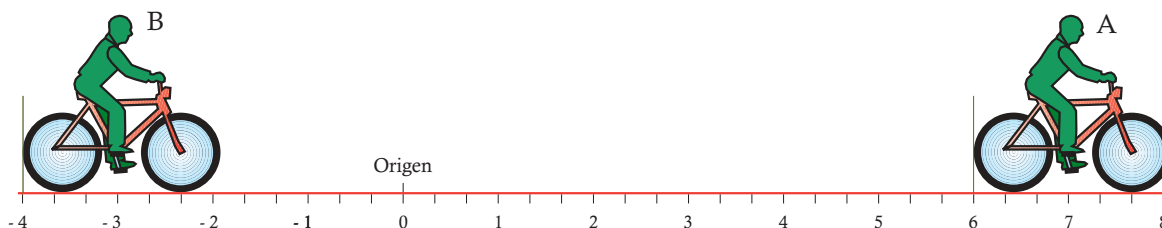


Fig. 4.13 La posición de un objeto queda determinada si se conocen: **a)** La distancia entre el objeto y el marco de referencia, (en el caso mostrado, el punto de origen). **b)** La ubicación respecto al marco de referencia.

bicicletas sobre una línea recta, el sistema de coordenadas será unidimensional y, para poder determinar la ubicación de las bicicletas en un momento dado, asignamos una escala de unidades de medida sobre el eje de coordenadas.

La posición de las bicicletas A y B la debemos determinar siempre en relación al marco de referencia, que en este caso es el origen del sistema de coordenadas, o sea, el cero. Así, tenemos que la bicicleta A está a 6 m a la derecha del origen y la bicicleta B está a 4 m a la izquierda del origen, si medimos las distancias con respecto a la rueda trasera de las bicicletas. Cuando decimos a la derecha o a la izquierda, estamos estableciendo una ubicación. Esta ubicación se expresa con frecuencia mediante los signos más(+) y menos(-), asignando el signo (+) a la ubicación a la derecha del cero y el signo (-) a la ubicación a la izquierda del cero.

En base a lo expresado antes, se tiene que la posición de un cuerpo o partícula en el espacio, bien sea éste unidimensional, bidimensional o en tres dimensiones, queda bien determinada si consideramos dos cosas: la separación o distancia entre el cuerpo o partícula y el punto o marco de referencia y la ubicación en relación al origen o punto de referencia; esto es, si la partícula está a la derecha o a la izquierda del punto de referencia o, en otras palabras, si está en posición positiva o negativa en relación a dicho punto.

Para establecer la distancia o separación, no hay necesidad de referirla a un marco, ni establecer una ubicación, simplemente se mide en una escala apropiada. En la fig. 4.13, podemos obtener la distancia entre las bicicletas, midiendo la separación entre ellas, sin tomar en cuenta el punto de referencia ni la ubicación de las mismas. De esa figura, se deduce que la bicicleta A está a una distancia de 10 m de la

bicicleta B. A cantidades como la distancia, que pueden expresarse mediante una cantidad, sin expresar su ubicación espacial, se les denomina *cantidades escalares*.

La ubicación espacial de un objeto está relacionada con la posición que ocupa con respecto al marco de referencia. Así, decimos que la bicicleta A está a la derecha del origen, mientras que la bicicleta B está a la izquierda del mismo. Esta descripción, hacia la derecha o hacia la izquierda del origen, es una forma de asignar una *dirección* al objeto.

La especificación, tanto de la distancia de un objeto a un marco de referencia, como su dirección, puede hacerse mediante la llamada *representación vectorial*. En este contexto, un *vector* es una cantidad que expresa tanto la magnitud como la dirección de una variable física.

Un vector es una cantidad que puede usarse para representar tanto la magnitud como la dirección de una variable física. Un escalar, por lo contrario, indica sólo la magnitud, sin tomar en cuenta la dirección.

4.8 REPRESENTACIÓN DE UN VECTOR

Un vector se representa por una flecha, cuya punta indica la dirección, y cuyo otro extremo es la cola. La longitud de la flecha se dibuja siempre proporcional a la magnitud del vector. Para representar las cantidades vectoriales se utilizan letras en negrita como la **A**, o en la forma $\vec{A}$. Cualesquiera de estas notaciones es válida. La magnitud es, por supuesto, un escalar y se representa por $|A|$ o bien por A . La figura 4.14 muestra dos vectores

con sus longitudes proporcionales a su magnitud; la longitud del vector $\vec{B}$ es el doble de la longitud del vector $\vec{A}$.

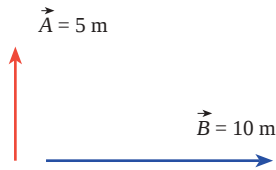


Fig. 4.14 Geométricamente, un vector se representa mediante una flecha. La dirección de la flecha es la dirección del vector. La longitud de la flecha es proporcional a la magnitud del vector.

4.9 OPERACIONES CON VECTORES: MÉTODO GRÁFICO.

4.9.1 Adición de vectores

Al tratar de sumar vectores que representen cantidades físicas, es necesario que los mismos estén en unidades iguales u homogéneas, pues no tiene sentido, por ejemplo, sumar un vector que represente una velocidad con un vector que represente una aceleración. Lo mismo vale para cantidades escalares, pues no se puede comprender que se sumen unidades de tiempo, como 19 horas, con unidades de longitud, como 15 metros.

La suma de vectores se realiza gráficamente, siguiendo procedimientos geométricos. Así, tenemos que para sumar los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, con sus magnitudes a una misma escala, se dibuja el vector $\vec{A}$ y, a continuación, a partir de la punta de la flecha de éste, se dibuja el vector $\vec{B}$, como se muestra en la figura 4.15. El vector resultante $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$, va de la cola de $\vec{A}$ a la punta de $\vec{B}$.

Existe un método alternativo para sumar dos vectores llamado *método de adición del paralelogramo*, el cual

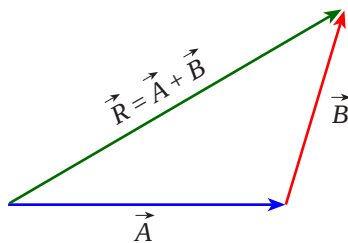


Fig. 4.15 La suma del vector $\vec{A}$ con el vector $\vec{B}$ es el vector $\vec{R}$, el cual va desde la cola de $\vec{A}$ hasta la punta de $\vec{B}$.

consiste en unir las colas de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y el vector resultante, $\vec{R}$, es la diagonal del paralelogramo formado con los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, como se muestra en la figura 4.16(a). Cuando se suman dos vectores, la suma o resultante es independiente del orden en que se consideren los vectores. Es decir, $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$, como se puede ver en la figura 4.16(b).

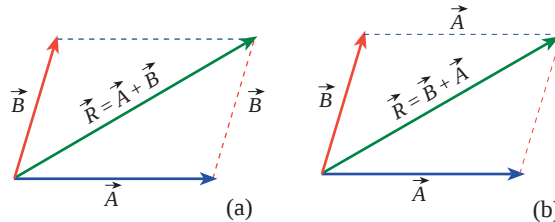


Fig. 4.16 Suma de los vectores, mediante la regla del paralelogramo: se dibujan los dos vectores, juntando sus colas, se completa el paralelogramo y se dibuja la diagonal desde la unión de las colas. Dicha diagonal representa a la resultante de los vectores. La suma de dos vectores obedece a la propiedad conmutativa.

Luego de conocer el procedimiento para sumar dos vectores, podemos generalizarlo para sumar cualquier número de vectores. En la fig. 4.17 se muestran 4 vectores para ser sumados. Los mismos pueden sumarse dos a la vez, por el método de la unión de la punta con la cola. Así, el vector $\vec{C}$ es el vector correspondiente a la adición $\vec{A} + \vec{B}$; este vector $\vec{C}$ lo sumamos con el vector $\vec{D}$ y obtenemos $\vec{E}$. Este último vector lo sumamos con $\vec{F}$ para obtener, finalmente, el vector resultante, $\vec{G}$. Normalmente, no se requiere ir sumando cada dos vectores a la vez, sino que se van dibujando directamente los vectores en cualquier orden, uniendo punta con cola, tal como se muestra en la fig. 4.17.

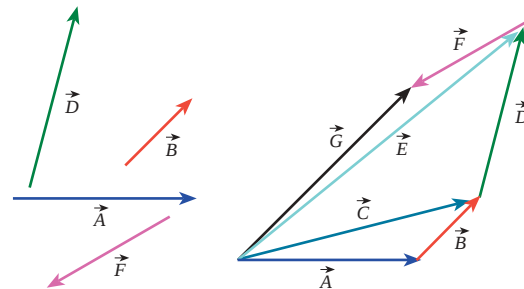


Fig. 4.17 Adición gráfica de varios vectores, mediante la suma sucesiva de los mismos.

4.9.2 Sustracción de vectores

Para restar el vector $\vec{B}$ del vector $\vec{A}$, se invierte la dirección del primero, el cual queda como $(-\vec{B})$ y, luego, se suma $\vec{A}$ y $(-\vec{B})$, de acuerdo a la regla de la suma de dos vectores. Esto es:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

La fig. 4.18 muestra la representación gráfica de la sustracción de dos vectores.

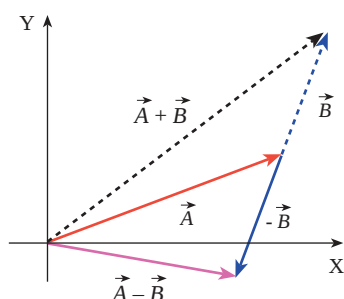


Fig. 4.18 Sustracción de vectores. El vector $(-\vec{B})$ es de igual magnitud que el vector $\vec{B}$, pero tiene dirección contraria. El resultado se obtiene aplicando la regla de la suma de dos vectores. En este caso $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

4.9.3 Multiplicación de un vector por un escalar

Si el vector $\vec{A}$ se multiplica por una cantidad escalar, n , positiva o negativa, el resultado es un vector que tiene la magnitud $n\vec{A}$ y la misma dirección de $\vec{A}$, si n es positivo y la dirección opuesta a $\vec{A}$, si n es negativo. Por ejemplo, el vector $3\vec{A}$ es tres veces mayor que el vector $\vec{A}$ y tiene la misma dirección de éste. En cambio, el vector $-2\vec{A}$ es dos veces mayor que $\vec{A}$, pero apunta en la dirección opuesta del mismo. Esto se ilustra en la fig. 4.19.

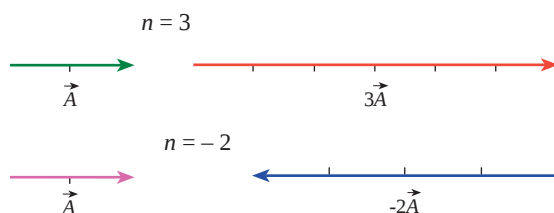


Fig. 4.19 Multiplicación de un vector $\vec{A}$ por un escalar. Si n es positivo, el vector resultante tiene la misma dirección de $\vec{A}$. Si n es negativo, el vector resultante tiene dirección contraria a $\vec{A}$.

4.10 OPERACIONES CON VECTORES: MÉTODO ANALÍTICO

El método analítico consiste en aplicar algunas reglas de la trigonometría en el plano cartesiano, conjuntamente con el concepto de componentes de un vector. En la fig. 4.20 están dibujados los vectores $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$ en las direcciones de los ejes X y Y del plano cartesiano. Si aplicamos el método del paralelogramo para la suma de los dos vectores, se obtiene $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$. Este resultado nos indica que el vector está formado por las dos componentes perpendiculares $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$, las cuales, al sumarse, dan como resultado el vector original. Las magnitudes de los vectores $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$, son A_x y A_y , respectivamente. Observa que las magnitudes se escriben sin las flechitas arriba.

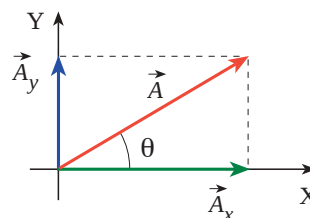


Fig. 4.20 Componentes de un vector. Un vector cualquiera, $\vec{A}$, en el plano X-Y puede descomponerse en sus componentes rectangulares $\vec{A}_x$ y $\vec{A}_y$, donde $\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$.

Si en la figura 4.20 aplicamos las razones trigonométricas para triángulos rectángulos, podemos determinar las magnitudes de las componentes, conociendo la magnitud y dirección del vector. Así, se tiene:

$$\text{sen } \theta = \frac{A_y}{A} \Rightarrow A_y = A \text{sen } \theta \quad (4.1)$$

$$\text{cos } \theta = \frac{A_x}{A} \Rightarrow A_x = A \text{cos } \theta \quad (4.2)$$

El módulo del vector se calcula por el teorema de Pitágoras:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (4.3)$$

El ángulo se calcula mediante la relación:

$$\tan \theta = \frac{A_y}{A_x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{A_y}{A_x} \quad (4.4)$$

El módulo de las componentes puede estar precedido por un signo negativo o positivo, lo cual depende del ángulo θ . Por ejemplo, si $\theta = 160^\circ$, A_x está precedida por un signo negativo. Si θ es igual a 260° , tanto A_x como A_y están precedidos por signos negativos.

Ejemplo 4.4

La figura 4.21 representa dos vectores identificados como:

$$\vec{A} = (5 \text{ m}, 45^\circ \text{ al norte del este})$$

$$\vec{B} = (7 \text{ m}, 72^\circ \text{ al norte del este})$$

Se requiere hallar la suma de los dos vectores, utilizando el método de las componentes rectangulares.

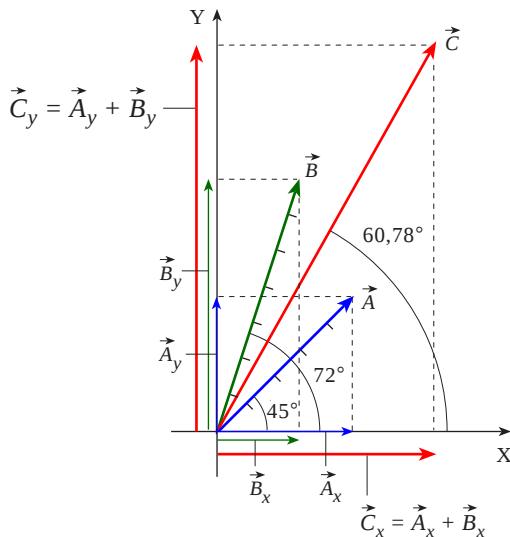


Fig. 4.21 Determinación del vector suma $\vec{C}$, sumando las componentes rectangulares de los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

Solución

De acuerdo con la figura, los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se pueden descomponer en sus componentes rectangu-

lares de la manera siguiente:

$$A_x = A \cos 45^\circ = 5 \cdot 0,707 = 3,535 \text{ m}$$

$$A_y = A \sin 45^\circ = 5 \cdot 0,707 = 3,535 \text{ m}$$

$$B_x = B \cos 72^\circ = 7 \cdot 0,309 = 2,163 \text{ m}$$

$$B_y = B \sin 72^\circ = 7 \cdot 0,951 = 6,657 \text{ m}$$

Los módulos de las componentes rectangulares del vector resultante, $\vec{C}$, son:

$$C_x = A_x + B_x = 3,535 + 2,163 = 5,698$$

$$C_y = A_y + B_y = 3,535 + 6,657 = 10,192$$

El módulo del vector se obtiene calculando, mediante el teorema de Pitágoras, la hipotenusa del triángulo rectángulo constituido por esta hipotenusa y los módulos de las componentes; así tenemos:

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{5,698^2 + 10,192^2} =$$

$$= \sqrt{32,467 + 103,876} = \sqrt{136,343} = 11,676$$

La dirección o ángulo del vector se calcula así:

$$\tan \theta = \frac{C_y}{C_x} = \frac{10,192}{5,698} = 1,788$$

$$\theta = \tan^{-1}(1,788) = 60,78^\circ$$

El vector suma de los vectores $\vec{A} + \vec{B}$ tendrá una magnitud de 11,676 y formará un ángulo de $60,78^\circ$ con el eje X, tal como se muestra en la fig. 4.21.

4.11 VECTORES UNITARIOS. FORMA POLAR DE UN VECTOR.

Un método alternativo en la aplicación de las componentes rectangulares de un vector, para los efectos principalmente de sumas y sustracciones, es aplicar el concepto de vectores unitarios. Los vectores unitarios son vectores cuyo módulo es la unidad, y no tienen dimensión. Los símbolos utilizados para representarlos son: $\vec{i}$ asociado al eje de las X, $\vec{j}$, asociado al eje de las Y, y $\vec{k}$ asociado al eje de las Z, como se muestra en la figura 4.22(a) para un sistema en tres dimensiones y en la figura 4.22(b) para un sistema en dos dimensiones.

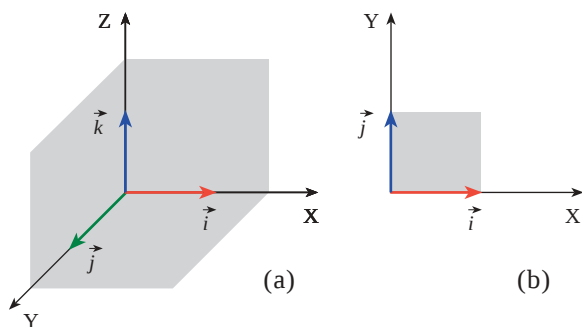


Fig. 4.22 Vectores unitarios $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ en un sistema de coordenadas: a) Tridimensional, b) Bidimensional.

Cualquier vector puede ser representado, entonces, por vectores unitarios, tal como se muestra en la fig. 4.23. La componente A_x multiplicada por el vector unitario $\vec{i}$ da origen al vector $A_x \vec{i}$, el cual descansa sobre el eje X y su magnitud es A_x . De igual manera, $A_y \vec{j}$ es un vector sobre el eje Y de magnitud A_y . Entonces, la representación del vector $\vec{A}$, en términos de vectores unitarios, será:

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} \quad (4.5)$$

A la relación (4.5) se le conoce como expresión *rectangular* o *cartesiana* de un vector, ya que establece cómo se expresa un vector, según sus componentes, en un plano cartesiano.

Para sumar dos vectores expresados en forma cartesiana, simplemente se suman las componentes según los ejes X y, luego, las componentes según el eje Y. Por ejemplo, si $\vec{A} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ y $\vec{B} = 6\vec{i} + 3\vec{j}$, el vector resultante de su suma es el vector $\vec{C} = 9\vec{i} + 5\vec{j}$.

Otra manera de expresar un vector se denomina *forma polar*, que toma en cuenta tanto el módulo del vector, A , como el ángulo, θ , que forma con el semieje positivo de las X. La representación polar de un vector $\vec{A}$ puede escribirse como:

$$\vec{A} = (A, \theta) \quad (4.6)$$

Las relaciones entre las fórmulas (4.5) y (4.6) son las siguientes:

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (4.7) \quad \theta = \tan^{-1} \frac{A_y}{A_x} \quad (4.8)$$

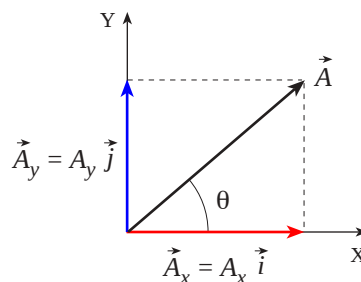


Fig. 4.23 Representación de un vector por medio de vectores unitarios.

El ángulo θ se mide a partir del semieje X positivo y su valor dependerá de los signos que precedan a las componentes A_y y A_x , de forma que:

1. Si A_y y A_x son ambas positivas, el ángulo está ubicado en el primer cuadrante ($0 \leq \theta < 90^\circ$).
2. Si A_y es positiva y A_x es negativa, el ángulo está ubicado en el segundo cuadrante ($90 \leq \theta < 180^\circ$).
3. Si A_y y A_x son ambas negativas, el ángulo está ubicado en el tercer cuadrante ($180 \leq \theta < 270^\circ$).
4. Si A_y es negativa y A_x es positiva, el ángulo está ubicado en el cuarto cuadrante ($270 \leq \theta < 360^\circ$).

Ejemplo 4.5

Resuelve el ejemplo 4.4, usando la expresión cartesiana de los vectores dados:

$$\vec{A} = (5 \text{ m}, 45^\circ \text{ al norte del este})$$

$$\vec{B} = (7 \text{ m}, 72^\circ \text{ al norte del este})$$

Solución

Convirtamos ambos vectores a la forma cartesiana:

$$\vec{A} = (5 \text{ m}, 45^\circ \text{ al norte del este}) = (5, 45^\circ) =$$

$$= 5 \cos 45^\circ \vec{i} + 5 \sin 45^\circ \vec{j} = 3,536 \vec{i} + 3,536 \vec{j}$$

$$\vec{B} = (7 \text{ m}, 72^\circ \text{ al norte del este}) = (7, 72^\circ) =$$

$$= 7 \cos 72^\circ \vec{i} + 7 \sin 72^\circ \vec{j} = 2,163 \vec{i} + 6,657 \vec{j}$$

Sumando los vectores:

$$\vec{C} = 3,536 \vec{i} + 3,536 \vec{j} + 2,163 \vec{i} + 6,657 \vec{j} =$$

$$= 5,699 \vec{i} + 10,193 \vec{j}$$

Convirtiendo a forma polar:

$$\vec{C} = (11,678; 60,79^\circ)$$

Observa que los resultados son casi iguales a los del ejemplo 4.4.

4.12 VECTOR DE POSICIÓN

Luego de realizada la introducción a los vectores, pasamos a tratar el concepto de *vector de posición*, para lo cual se hará referencia a la relatividad del movimiento. Como se explicó anteriormente, el movimiento es esencialmente relativo; es decir, sólo tiene sentido hablar de movimiento de un cuerpo si lo relacionamos con un marco de referencia.

Ahora bien, para determinar la posición de un cuerpo o partícula con relación a un marco de referencia, bien sea en un espacio de tres dimensiones, de dos dimensiones o unidimensional, es necesario aplicar el concepto de vector de posición, el cual se define a continuación:

Un vector de posición es un segmento de recta que va del origen o marco de referencia al punto o posición donde se encuentra el cuerpo o partícula. La dirección del vector de posición está determinada por los dos puntos del vector: el origen y el punto final donde se sitúa el cuerpo o partícula.

En la figura 4.24 se muestra el vector de posición $\vec{R}$ en un espacio tridimensional. De acuerdo con el

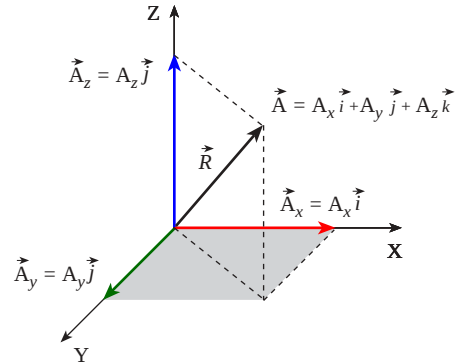


Fig. 4.24 Vector de posición en un espacio tridimensional, expresado en término de sus vectores unitarios.

sistema de coordenadas rectangulares asociado, podemos representar el vector de posición en términos de los vectores unitarios así:

$$\vec{R} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \quad (4.9)$$

En esta notación, como sabemos, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ son los vectores unitarios que apuntan en la dirección de los ejes X, Y, Z, y las cantidades A_x , A_y , y A_z son las componentes del vector de posición, $\vec{R}$.

4.13 VECTOR DESPLAZAMIENTO

El concepto de *vector desplazamiento* está íntimamente relacionado con el concepto de vector de posición. El mismo se aplica cuando se trata de analizar correctamente el movimiento de traslación de un cuerpo o partícula en el espacio. Así, cuando un cuerpo se mueve, el cambio de posición se puede describir mediante el *vector desplazamiento*, al cual podemos definir como *el vector que representa el cambio desde la posición inicial o punto de partida, hasta la posición final del cuerpo en movimiento*.

En la fig. 4.25 se muestra el vector desplazamiento de un autobús que va desde la ciudad de Barcelona a la ciudad de Puerto Píritu, ambas en el estado Anzoátegui. El marco de referencia es el terminal de Puerto La Cruz. De acuerdo a la notación de vectores, la cola de la flecha indica el punto de partida en la ciudad de Barcelona y la punta de la flecha indica el punto final de llegada a la ciudad de Puerto Píritu. Según la figura 4.25, el autobús ha

El vector desplazamiento permite representar el cambio desde una posición inicial a una posición final de un cuerpo en movimiento.

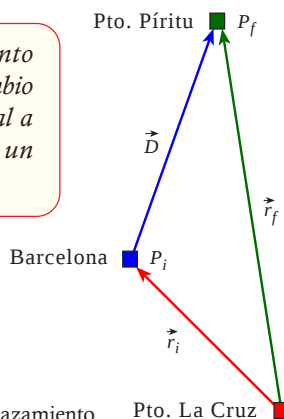


Fig. 4.25 $\vec{D}$ es el vector desplazamiento

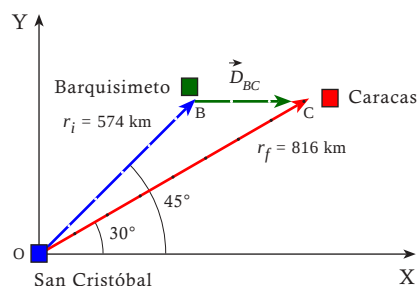


Fig. 4.26 Ejemplo 4.6. El desplazamiento del automóvil es igual al cambio de posición entre Barquisimeto y Caracas.

realizado un desplazamiento entre el punto inicial P_i y el punto final P_f ; es decir, su desplazamiento parte desde la posición inicial, punta de la flecha del vector de posición $\vec{r}_i$ hasta la posición final, punta de la flecha del vector de posición $\vec{r}_f$. El vector desplazamiento se representa por $\vec{D}$ y también por $\Delta\vec{r}$ donde Δ significa siempre el cambio de una cantidad, entendido este cambio como la diferencia entre el valor final y el valor inicial. El vector desplazamiento, en este caso, lo podemos calcular aplicando la regla del paralelogramo; así se tiene:

$$\vec{D} = \vec{r}_f - \vec{r}_i$$

Ejemplo 4.6

Calcula el vector desplazamiento mostrado en la fig 4.26. Se trata un de viaje en automóvil desde la ciudad de Barquisimeto, capital del estado Lara, hasta la ciudad de Caracas. Se ha seleccionado como marco de referencia el terminal de pasajeros en San Cristóbal. La distancia en línea recta entre San Cristóbal y Barquisimeto es de 574 km y entre San Cristóbal y Caracas es de 816 km.

Solución

El vector de posición del automóvil en Barquisimeto se representa en símbolos así:

$$\vec{D}_{OB} = 574 \text{ km}, 45^\circ \text{ al norte del este} = (574, 45^\circ)$$

El vector de posición del automóvil en Caracas se

representa igualmente así:

$$\vec{D}_{OC} = 816 \text{ km}, 30^\circ \text{ al norte del este} = (816, 30^\circ)$$

El punto de referencia, como se ha mencionado, se encuentra en San Cristóbal. El desplazamiento del automóvil es el vector:

$$\vec{D}_{BC} = \vec{D}_{OC} - \vec{D}_{OB} = \Delta\vec{r}$$

Expresando los vectores $\vec{D}_{OC}$ y $\vec{D}_{OB}$ mediante sus componentes rectangulares:

$$\vec{D}_{OC} = (816, 30^\circ) = 816 \cos 30^\circ \vec{i} + 816 \sin 30^\circ \vec{j}$$

$$\vec{D}_{OC} = 706,68 \vec{i} + 408 \vec{j}$$

$$\vec{D}_{OB} = (574, 45^\circ) = 574 \cos 45^\circ \vec{i} + 574 \sin 45^\circ \vec{j}$$

$$\vec{D}_{OB} = 405,88 \vec{i} + 405,88 \vec{j}$$

Sustrayendo los vectores anteriores, se tiene:

$$\Delta\vec{r} = (706,68 - 405,88) \vec{i} + (408 - 405,88) \vec{j}$$

$$\Delta\vec{r} = 300,80 \vec{i} + 2,12 \vec{j}$$

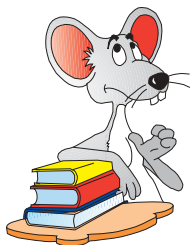
El resultado anterior corresponde al vector desplazamiento en forma cartesiana. Pasando a la forma polar:

$$\Delta\vec{r} = (300,81; 0,40^\circ)$$

Resultado que nos indica que el vector desplazamiento tiene un módulo de 300,81 km y forma un ángulo de $0,40^\circ$ con el semieje X positivo.

Es muy importante aclarar que, con seguridad, el automóvil ha recorrido más de 300,81 km, ya que el vector desplazamiento como se sabe es el segmento de recta cuya magnitud va desde la posición original en Barquisimeto hasta la posición final en Caracas y su dirección está determinada por estos dos puntos, mientras que la trayectoria es la distancia total registrada por el odómetro del auto, que incluye las diferentes curvas de la carretera, lo que hace que la trayectoria o distancia sea normalmente mayor que el módulo del vector desplazamiento. Así que

no debemos confundir nunca el desplazamiento con la distancia recorrida, ya que, por ejemplo, el desplazamiento será cero, en un movimiento que se inicie y termine en un mismo punto, aun cuando se hayan recorrido grandes distancias, desde que se sale del punto inicial hasta que se regrese a este punto, mientras que la distancia tendrá un valor que lo dará la medición de la trayectoria recorrida; es decir, en cualquier movimiento, el desplazamiento puede ser cero; la distancia jamás será cero.



PIENSA Y EXPLICA

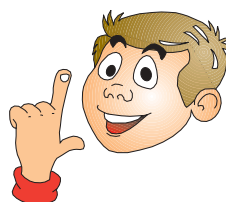


- 4.14** Define un vector ¿Cuál es la diferencia entre un vector y un escalar? ¿Es el módulo de un vector un escalar?
- 4.15** ¿Cómo se representa usualmente un vector? ¿Cómo se representa su módulo?
- 4.16** ¿Cuál es la diferencia entre los métodos gráfico y analítico en la representación vectorial?
- 4.17** Explica, mediante un ejemplo, cómo se suman gráficamente dos o más vectores.
- 4.18** Explica, mediante un ejemplo, cómo se realiza la sustracción de dos vectores, mediante el método gráfico.
- 4.19** ¿Qué son vectores unitarios? ¿Cómo se representa un vector en la forma polar? ¿Cuál es la relación entre la forma cartesiana y la forma polar de un vector?

- 4.20** Describe el método analítico, tal como se presenta en la sección 4.8, para efectuar las operaciones básicas con vectores. Escribe las relaciones que permiten determinar tanto las componentes de un vector como el módulo del mismo.
- 4.21** ¿Cómo se determina la ubicación del ángulo de un vector, de acuerdo a los signos de las componentes del mismo?
- 4.22** Define el concepto de vector de posición y da ejemplos en una, dos y tres dimensiones. Expresa el vector de posición en términos de sus vectores unitarios.
- 4.23** ¿Qué es un vector de desplazamiento? ¿Cómo se relaciona con el vector de posición?
- 4.24** ¿Bajo qué condiciones el vector desplazamiento puede ser nulo?



PROBLEMAS



4.3 Un hombre corre 4 km hacia el oeste y, luego, avanza 8 km hacia el norte. **a)** ¿A qué distancia se encuentra desde su punto de partida. **b)** ¿Qué distancia habría recorrido si se hubiera encaminado directamente hasta su punto final? **c)** ¿Qué ángulo formaría con el norte si hubiera llegado directamente a su destino? **d)** ¿Cuál es el valor del vector de posición cuando está en el punto de llegada? Expresa el vector de posición en sus formas cartesiana y polar.

4.4 Los remolcadores de la figura 4.27 arrastran al barco con fuerzas de $4 \cdot 10^4$ newtons. Determina la magnitud y dirección de la fuerza neta de remolque.

4.5 Un vehículo se desplaza según la figura 4.28 mostrada para llegar desde el punto A hasta el punto B. Determina: **a)** La distancia total recorrida. **b)** El vector desplazamiento correspondiente al movimiento del vehículo. **c)** La distancia que recorrería el vehículo si se dirigiera directamente desde A hasta B y el ángulo que formaría con la horizontal.

4.6 Utiliza el método de las componentes rectangulares para determinar la suma de los vectores:

$$\vec{A} = (4 \text{ m } 20^\circ \text{ al oeste del norte})$$

$$\vec{B} = (5 \text{ m } 45^\circ \text{ al sur del oeste})$$

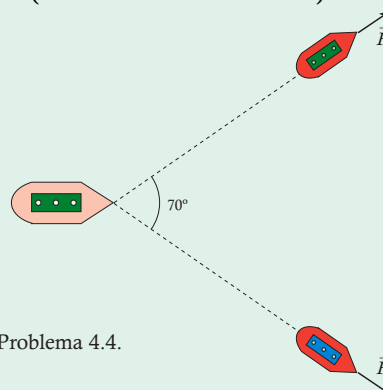


Fig. 4.27 Problema 4.4.

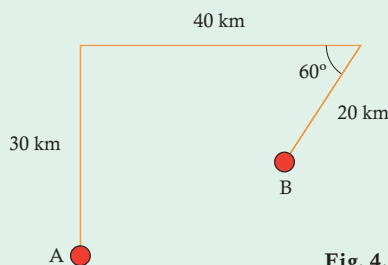


Fig. 4.28 Problema 4.5.

4.14 RAPIDEZ MEDIA. VELOCIDAD MEDIA.

Recordemos que la parte de la Física que estudia el movimiento de los cuerpos, sin tener en cuenta las causas que lo producen, es la *Cinemática*. La Cinemática junto con la *Dinámica* y la *Estática* constituyen la rama de la Física conocida como la *Mecánica*. El cometido de la Cinemática está referido al estudio de tres tipos de movimientos: el movimiento de *traslación*, el movimiento de *rotación* y el movimiento *vibratorio*.

El estudio y descripción del *movimiento traslacional* puede ser realizado utilizando el *método escalar* o el *método vectorial*. El método escalar se basa en los conceptos de distancia y rapidez, mientras que el método vectorial se basa en los conceptos de desplazamiento y velocidad. El método escalar ha sido utilizado desde el tiempo de los griegos y, aunque es más sencillo que el método vectorial, es muy limitado para describir el movimiento de los cuerpos, fundamentalmente porque no contempla la dirección del movimiento. El método vectorial se desarrolló con el avance de los conocimientos

matemáticos en el área del análisis vectorial.

En la descripción del movimiento traslacional se empleará el concepto de partícula, tal como se describió al inicio de este capítulo, en lugar de las expresiones cuerpo u objeto, para facilitar la comprensión de los conceptos físicos del fenómeno del movimiento.

Cuando se trata de estudiar el movimiento de una partícula, una de las preguntas fundamentales que se formulan es con qué rapidez se mueve. Nota que cuando se expresa "con qué rapidez se mueve", no se está asociando ninguna dirección al movimiento. Por lo tanto, tenemos que aceptar que cualquier medida de esta rapidez debe ser una cantidad escalar. Esta manera de exponer el estudio del movimiento de las partículas corresponde, precisamente, al método escalar, el cual se considera incompleto, porque ignora el importante factor de la dirección del movimiento.

4.14.1 Rapidez media

Si viajamos en un automóvil y nos fijamos por un rato en el velocímetro, instrumento universalmente conocido que mide la rapidez a la cual se desplaza en todo momento el automóvil, veremos que la aguja no marca una cantidad fija. Muy al contrario, la misma se mueve en cualquier sentido con bastante frecuencia. Esta inestabilidad de la aguja es debido, entre otras cosas, a que el chofer tiene que aflojar el acelerador ante curvas pronunciadas, presencia de puentes, ascenso de pendientes, etc. Lo anterior nos indica que la rapidez con que se desplaza el automóvil no es constante. Por esta razón, es necesario utilizar un valor promedio de la rapidez denominado *rapidez media*.

La rapidez media de una partícula, durante un intervalo de tiempo Δt , es la distancia, d , recorrida por esa partícula durante ese intervalo, dividida entre el intervalo de tiempo.

La relación matemática que expresa a la rapidez media es:

$$v_m = \frac{d}{\Delta t} \quad (4.10)$$

En esta ecuación, v_m es la rapidez media, d es la distancia o trayectoria y Δt el intervalo de tiempo empleado en recorrer esa trayectoria.

El tablero de instrumentos de cualquier automóvil contiene, además del velocímetro, un instrumento llamado odómetro que mide continuamente la distancia que recorre el auto; esta distancia está representada por la d en la relación (4.10).

Ejemplo 4.7

En la fig. 4.29 la distancia entre dos puntos A y B es de 319 km. Un automóvil tarda en recorrerla 5 horas. ¿Con qué rapidez media recorrerá el automóvil esta distancia?

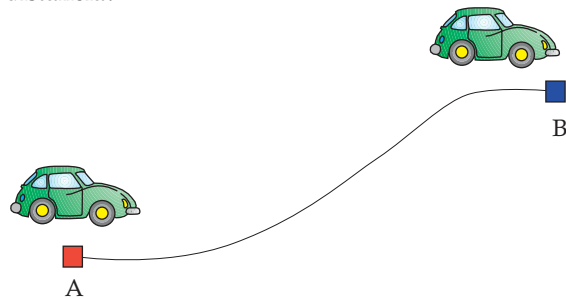


Fig. 4.29 Ejemplo 4.7. El automóvil parte del punto A y recorre 319 km hasta llegar al punto B en 5 horas. Se requiere determinar la rapidez media.

Solución

Utilizando la relación (4.10):

$$v_m = \frac{319 \text{ km}}{5 \text{ h}} = 63,80 \text{ km/h}$$

El resultado obtenido es aceptable, en un trayecto donde es difícil mantener un valor más elevado todo el tiempo, debido a elementos tales como densidad de circulación de otros vehículos en la vía, presencia de puentes, curvas, etc.

Ejemplo 4.8

Utilizando parte del ejemplo anterior, supongamos que queremos realizar otro viaje sobre la misma longitud de la trayectoria y en el tiempo de 5 horas, pero de tal manera que los primeros 130 km los

recorremos a la rapidez media de 45 km/h, ¿qué rapidez tendremos que imprimir a nuestro vehículo para recorrer los 189 km restantes, si queremos mantener constante el tiempo estipulado?

Solución

Los primeros 130 km se recorren a 45 km/h. Sustituyendo estos valores en la ecuación (4.10), se obtiene Δt_1 . Tenemos, entonces:

$$\Delta t_1 = \frac{130 \text{ km}}{45 \text{ km/h}} = 2,89 \text{ h}$$

De acuerdo a lo planteado, tiempo Δt_2 requerido para recorrer los 189 km restantes es:

$$\Delta t_2 = 5 - 2,89 = 2,11 \text{ h}$$

La rapidez media desarrollada en este tiempo para los 189 km es:

$$v_{m2} = \frac{189 \text{ km}}{2,11 \text{ h}} = 89,57 \text{ km/h}$$

La solución de este ejemplo se ha podido tratar de resolver aplicando el criterio del promedio de los valores de la rapidez. De antemano se aclara que no se puede aplicar tal criterio, porque el tiempo en recorrer las distancias no es igual, tal como se demuestra a continuación. Sea v_{m1} la rapidez media desarrollada en el segundo tramo. Como se conoce la rapidez media del primer tramo y la rapidez media de la trayectoria completa (ver resultado del ejemplo 4.7), se puede intentar la solución utilizando el promedio de estas velocidades:

$$\frac{45 \text{ km/h} + v_{m1}}{2} = 63,80 \text{ km/h} \Rightarrow v_{m1} = 82,60 \text{ km/h}$$

Para esta rapidez, el intervalo de tiempo Δt_2 empleado en recorrer los 189 km será:

$$\Delta t_2 = \frac{189 \text{ km}}{82,60 \text{ km/h}} = 2,28 \text{ h}$$

Si sumamos este tiempo al empleado en recorrer el primer tramo, daría un tiempo total de 5,16 h, mayor al tiempo estipulado de 5 h para realizar el recorrido.

4.14.2 Velocidad media

Como se ha podido ver, la rapidez no está relacionada con la dirección del movimiento, por ser una cantidad escalar que no informa nada sobre dónde se inició ni dónde terminó el movimiento. Una descripción así de un movimiento, es realmente incompleta. La descripción del movimiento se hace, con más propiedad, aplicando el método vectorial, en lugar del método escalar. Esto nos lleva a describir el movimiento de una partícula especificando, por una parte, su rapidez (magnitud) y, por la otra, su dirección. La descripción del movimiento de una partícula en estos términos, conduce al concepto de *velocidad*. Una cantidad que, además de su módulo, especifique una dirección es, por definición, un vector; la velocidad de una partícula es, por naturaleza, un vector.

La rapidez media se definió en función de cantidades escalares de distancia e intervalo de tiempo. La velocidad media se define en términos del vector desplazamiento y un escalar, el intervalo de tiempo, que no altera la condición vectorial.

La fig. 4.30 muestra el movimiento de una partícula que se mueve de la posición A a la posición B. Cuando la partícula se encuentra en la posición A, el tiempo medido en ese instante es t_1 . La posición de la partícula en el sistema de coordenadas X-Y está determinada por el vector de posición $\vec{r}_1$.

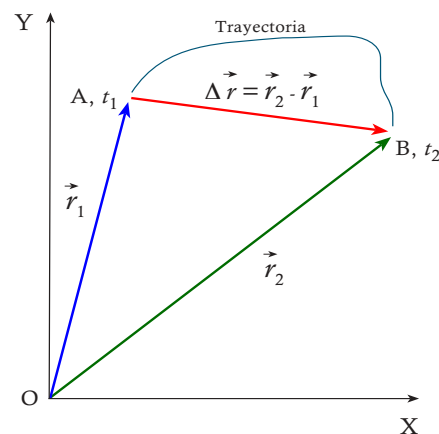


Fig. 4.30 Una partícula cambia de posición desde A hasta B en un intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$. El desplazamiento está dado por el vector $\Delta \vec{r}$. La velocidad media de una partícula entre A y B, $\vec{v}_m$, es un vector paralelo a $\Delta \vec{r}$.

Similarmente, en el punto B, el vector de posición de la partícula es $\vec{r}_2$ para un tiempo t_2 . El cambio de posición de la partícula al moverse el punto A al punto B está representado por el vector desplazamiento $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ y el intervalo de tiempo transcurrido entre estas dos posiciones es Δt .

La velocidad media, $\vec{v}_m$, de una partícula que se desplaza entre dos puntos, se define como el vector desplazamiento entre esos dos puntos, $\Delta\vec{r}$, dividido entre el intervalo de tiempo Δt , durante el cual ocurrió el desplazamiento.

La velocidad media puede, entonces, expresarse matemáticamente como:

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \quad (4.11)$$

En el Sistema Internacional (SI) de unidades, la velocidad media se expresa en metros por segundo (m/s). Es importante destacar que la expresión metros por segundo expresa realmente los metros recorridos en un segundo. La magnitud de la velocidad media es:

$$v_m = |\vec{v}_m| = \left| \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right| \quad (4.12)$$

Ejemplo 4.9

Calcula la velocidad media que un automóvil desarrolla para recorrer la distancia de, aproximadamente, 35 km a 25° al norte del este, entre la ciudades de Barcelona y Puerto Píritu, en el Edo. Anzoátegui, como se muestra en la figura 4.31. El marco de referencia de este movimiento es el terminal de Puerto La Cruz. Cuando el automóvil pasa por Barcelona, el tiempo transcurrido desde el terminal de Puerto La Cruz es de 1/4 h. El tiempo medido al llegar a Puerto Píritu es de 3/4 h.

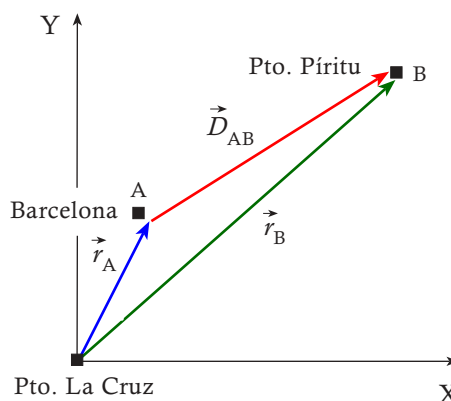


Fig. 4.31 Ejemplo 4.9. ¿Cuál es la velocidad media de un vehículo que viaja entre Barcelona y Puerto Píritu?

Solución

El vector desplazamiento, $\Delta\vec{r}$, corresponde al vector que va desde A hasta B y puede expresarse como:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = (35 \text{ km}, 25^\circ)$$

Observa que la cantidad 35 km corresponde al módulo del vector, mientras 25° es el ángulo que forma con el eje X. El intervalo de tiempo, Δt , entre Barcelona (A) y Puerto Píritu (B) está dado por:

$$\Delta t = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{2} \text{ h}$$

Como el vector velocidad tiene la misma dirección del vector desplazamiento (25° al norte del este), para determinar su módulo bastará con dividir 35 km por 1/2 h:

$$v_m = |\vec{v}_m| = \left| \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \right| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{|\Delta t|} = \frac{35 \text{ km}}{0,5 \text{ h}} = 70 \text{ km/h}$$

Entonces, podemos escribir:

$$\vec{v}_m = (70 \text{ km/h}, 25^\circ)$$

Nota que entre la ciudad de Barcelona y Puerto Píritu, la trayectoria no es, en modo alguno, una recta, por lo tanto su longitud será necesariamente mayor que la longitud del vector desplazamiento. Por lo tanto, si calculamos la rapidez media, ésta será mayor que la velocidad media calculada. En el caso que la trayectoria sea una recta, el módulo del vector

Un ciclista sobre una bicicleta en movimiento tiene tres posibilidades para variar su velocidad media: **a.** Utilizando los pedales para aumentar o disminuir la rapidez o módulo de la velocidad, **b.** Utilizando los frenos para disminuir la rapidez y **c.** Utilizando el manubrio para cambiar la dirección del movimiento.

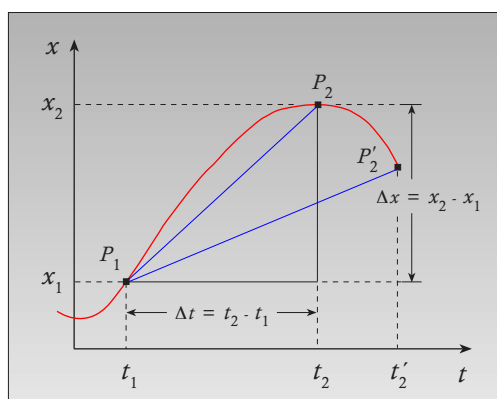


desplazamiento coincide con la longitud total de la misma y el módulo de la velocidad media es igual a la rapidez media.

Debemos enfatizar que, por definición, la velocidad media es un vector y que a todo vector lo caracterizan su módulo y su dirección. Si varían cualesquiera de estos valores, varía el valor de la velocidad.

4.14.3 Gráfica de la velocidad media

Una partícula que se desplace en un plano, siempre es posible ubicarla, con respecto al origen de un sistema de coordenadas, a través de su vector desplazamiento, $\Delta \vec{r}$, de componentes Δr_x y Δr_y . Cuando el movimiento se realiza sobre una línea recta sobre el eje de las X, el vector $\Delta \vec{r}$ tiene



$$\text{Pendiente} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_m$$

Fig. 4.32 Representación gráfica en función del tiempo del movimiento de una partícula que se mueve en un espacio unidimensional. La pendiente del segmento de recta trazada entre los puntos P_1 y P_2 , es $\Delta x / \Delta t$ y corresponde al módulo de la velocidad media de la partícula. La magnitud de $\vec{v}_m$ depende de Δt como se puede ver en la figura: el segmento de recta entre P_1 y P_2' tiene menor pendiente que el segmento entre P_1 y P_2 .

solamente la componente Δr_x , y podemos escribir:

$$\Delta \vec{r} = \Delta r_x \vec{i}$$

Esta componente será antecedida por un signo positivo si el movimiento tiene lugar en el sentido positivo del eje X y será antecedida por un signo negativo, si el mismo tiene lugar en sentido negativo del eje X.

Si sobre una gráfica trazamos en el eje de las X los cambios de la posición del movimiento de una partícula y en el eje de las t , los tiempos correspondientes a cada cambio de posición, obtenemos una curva de la forma como se muestra en la fig. 4.32, la cual, como se puede ver, es una representación de la función $x = f(t)$. La forma de la curva en la gráfica nos indica que el movimiento de la partícula tiene velocidad variable. Esta gráfica recibe el nombre de *gráfica de posición - tiempo* del movimiento de la partícula.

Si trazamos un segmento de recta o secante entre los puntos $P_2(x_2, t_2)$ y $P_1(x_1, t_1)$, obtenemos un triángulo rectángulo cuyos catetos son $(x_2 - x_1) = \Delta x$ (desplazamiento de la partícula) y $t_2 - t_1$ (intervalo de tiempo) y cuya hipotenusa es la secante entre los puntos P_2 y P_1 .

Observando la figura 4.32, podemos ver que la relación $\Delta x / \Delta t$ es la pendiente del segmento de recta trazado, donde la pendiente es la medida de la inclinación del segmento de recta. Si a Δt lo hacemos cada vez más pequeño, el cociente $\Delta x / \Delta t$ será cada vez mayor y la inclinación de la secante será, por consiguiente, cada vez mayor. Lo inverso es igualmente cierto. Por otra parte, observa que el

cociente $\Delta x / \Delta t$ (pendiente de la secante) es la expresión del módulo de la velocidad media de la partícula. Esto es, $v_m = \Delta x / \Delta t$. De esta interpretación geométrica de la velocidad de una partícula, podemos ver que la magnitud de dicha velocidad depende del intervalo de tiempo seleccionado. Esto puede notarse fácilmente en la figura 4.32: si se selecciona un tiempo $t_2' > t_2$, se aumenta el intervalo de tiempo y la velocidad media, representada por la secante $P_1 - P_2'$ será menor.

4.15 VELOCIDAD INSTANTÁNEA

Al concepto de velocidad instantánea de una partícula se puede llegar en forma similar a como se arribó al concepto de velocidad media, aclarando de antemano que el de velocidad instantánea es un concepto más importante que el de velocidad media, pues teniendo en cuenta que $\vec{v}_m$ se ha definido en base a un desplazamiento total y un tiempo total, la misma no suministra detalles del movimiento entre los puntos intermedios de la trayectoria que realmente siguió la partícula. Por ejemplo, podríamos encontrar que la partícula en diversos puntos de su trayectoria ha mantenido una velocidad constante, sin cambios en su magnitud o

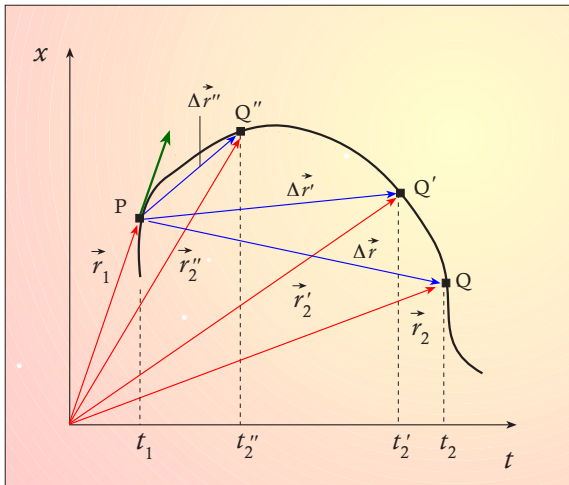


Fig. 4.33 A medida que el punto Q se va acercando al punto P, debido a intervalos de tiempo cada vez menores, la dirección de los vectores desplazamiento tiende a hacerse igual a la dirección de la tangente en el punto P. Cuando $t = t_1$, en el punto P, el módulo de la velocidad es igual a la pendiente de la curva en P y su dirección es la misma que la de la pendiente.

en su dirección. Si consideramos intervalos de tiempo cada vez menores, podemos obtener mayores detalles físicos del movimiento de una partícula, por más complicado que esta trayectoria sea. El concepto de velocidad instantánea apunta hacia la obtención de la velocidad de una partícula en un intervalo de tiempo extremadamente pequeño.

Consideremos la curva de la figura 4.33 que representa la función $x = f(t)$. En esta curva se muestran diversos cambios de los vectores de posición del movimiento en los intervalos de tiempo Δt , correspondientes. Los puntos Q' y Q'' son dos posiciones intermedias del movimiento de la partícula con sus respectivos vectores de posición $\vec{r}_2'$ y $\vec{r}_2''$.

Los vectores de desplazamiento $\Delta \vec{r}$, $\Delta \vec{r}'$ y $\Delta \vec{r}''$, como se puede ver, serán cada vez menores, a medida que nos acerquemos al punto P, al igual que los intervalos de tiempo correspondientes $\Delta t_1 = (t_2 - t_1)$, $\Delta t_2 = t_2' - t_1$ y $\Delta t_3 = t_2'' - t_1$.

Por definición, la velocidad media en cada intervalo de tiempo es la pendiente de la secante de la curva, tal como se ha explicado anteriormente. A medida que disminuye el intervalo de tiempo, la pendiente de la secante se va haciendo cada vez mayor, de tal manera que si el proceso de disminuir el intervalo de tiempo lo continuamos repetidamente, llegará un momento en que la secante será tangente a la curva en el punto P. En este punto, la velocidad media se considera como el límite al cual puede llegar la variación de los vectores de posición, cuando el intervalo de tiempo de esta variación tiende a cero; este límite es la velocidad instantánea de la partícula y es igual a la pendiente de la tangente en ese punto. Podemos definir, entonces, la velocidad instantánea como sigue:



La velocidad instantánea $\vec{v}$, en cualquier punto de la trayectoria de una partícula, es el límite de su velocidad media, expresada como la relación $\Delta \vec{r} / \Delta t$, cuando Δt tiende a cero.

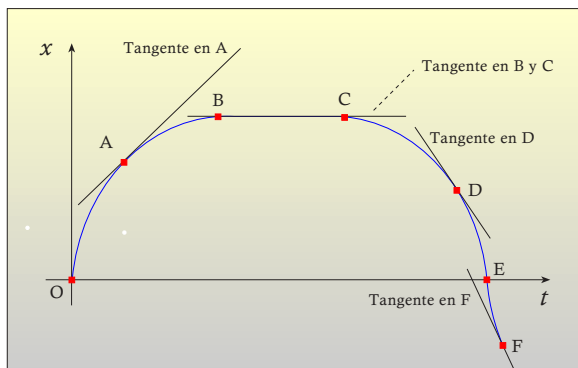


Fig. 4.34 Gráfica posición-tiempo del movimiento de una partícula con velocidad variable. En el punto A, la pendiente de la tangente es positiva y la velocidad instantánea es positiva. Entre los puntos B y C, la pendiente es cero y, por tanto, la velocidad es también igual a cero. Entre los puntos D y F, la pendiente y la velocidad son ambas negativas.

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{v}_m = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (4.13)$$

A la magnitud o módulo de la velocidad instantánea de una partícula, se le denomina rapidez instantánea.

Observa que la velocidad instantánea puede ser positiva, negativa o cero, dependiendo del signo de la pendiente. La figura 4.34 es un ejemplo que combina varios tipos de movimiento de una partícula. Observemos la condición del movimiento en los puntos mostrados de la trayectoria. En el punto A, la pendiente es positiva y la velocidad instantánea será entonces positiva. Desde el punto B a C, Δx es cero; es decir, no ha ocurrido desplazamiento alguno, la pendiente es cero y la velocidad instantánea en cualquier punto es cero, lo que quiere decir que la partícula en el intervalo de tiempo correspondiente Δt está detenida, no se está moviendo. En el punto D, la pendiente es negativa, la velocidad instantánea es negativa, la partícula se mueve en sentido inverso hacia el origen. Cuando la partícula llega al punto E sobre el eje del tiempo, la partícula está precisamente sobre el punto $x = 0$, punto de referencia o punto de partida. Si la partícula continúa moviéndose hacia el punto F, la pendiente continúa negativa y la partícula se dirige en el sentido negativo

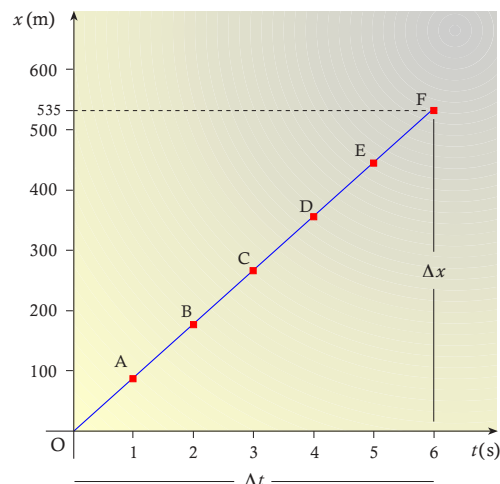


Fig. 4.35 Gráfica posición-tiempo para el movimiento de una partícula que se desplaza con velocidad constante.

del eje de las X. La velocidad, por lo tanto, sigue siendo negativa. El módulo o magnitud de la velocidad instantánea se llama rapidez instantánea y es, por supuesto, una cantidad escalar.

Cuando una partícula se desplaza a una velocidad constante, recorre la misma distancia en iguales intervalos de tiempo y la gráfica distancia-tiempo adquiere formas como la de la fig. 4.35. La magnitud de la velocidad es la misma durante cualquier intervalo de tiempo e igual a:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{535 \text{ m}}{6 \text{ s}} = 89,17 \text{ m/s}$$

Si hacemos una representación de la velocidad en función del tiempo para una partícula que se mueve a velocidad constante, encontraremos gráficas como la mostrada en la fig. 4.36. El valor de la ordenada se mantiene siempre igual a v durante cualquier intervalo de tiempo Δt .

4.16 ACELERACIÓN

Podemos afirmar, con bastante certeza, que todo el mundo tiene una idea, aunque sea vaga, de lo que es aceleración en el movimiento en general; oímos decir a cualquier persona que fulano de tal siempre anda acelerado, queriendo decir con esto que ese fulano anda siempre de prisa; oímos con frecuencia

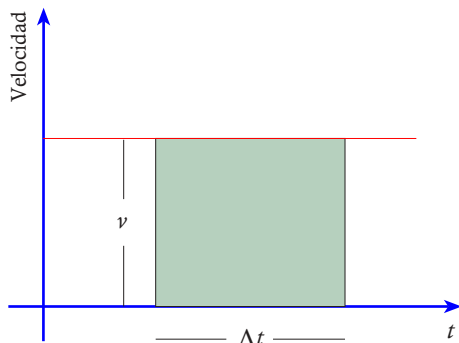


Fig. 4.36 Representación gráfica de la velocidad constante de una partícula que se mueve en línea recta. El desplazamiento en un intervalo de tiempo Δt , es igual al área del rectángulo cuyos lados son v y Δt .

también decir a alguien, luego de dejar un auto, que el chofer aceleraba mucho. Expresiones como éstas, del lenguaje corriente, nos indican que la palabra aceleración conlleva la idea de algo que se mueve cada vez más rápido. En el lenguaje de la Física, esta noción de la aceleración es bastante razonable; sin embargo, esta ciencia establece una definición y formulación en forma precisa, relacionándola, naturalmente, con la velocidad y el tiempo, dos factores fundamentales en el estudio del movimiento de los cuerpos.

Cada vez que una partícula en movimiento modifica su rapidez o, lo que es lo mismo, cambia el valor del módulo de su velocidad y/o su dirección, está cambiando su velocidad. Ahora bien, este cambio de velocidad ocurre siempre en un intervalo de tiempo. Si precisamos la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, estamos formulando lo que se conoce como *aceleración* de una partícula o cuerpo. En lenguaje sencillo, referido a nosotros mismos, si modificamos nuestro estado de movimiento, bien aumentando o disminuyendo nuestra rapidez, cuando caminamos, trotamos o corremos o si cambiamos la dirección de nuestro movimiento, estamos en, cada caso, cambiando la velocidad; es decir, estamos acelerando.

Todos, por la experiencia de viajar en autos, sabemos que cuando el conductor aprieta el acelerador, somos empujados hacia el espaldar de los asientos o bien cuando el conductor frena bruscamente, somos empujados hacia adelante. Esto nos indica que la aceleración se aplica tanto a los aumentos como a

las disminuciones de la velocidad, por unidad de tiempo.

Por otra parte, la variación de la velocidad entre dos puntos puede tener muchos valores, dependiendo, entre otras cosas, de la forma de la trayectoria del movimiento, lo cual puede hacer cambiar la velocidad, bien por variación de la rapidez, como por el cambio de dirección o por la variación simultánea de estos dos factores; por eso se hace necesario definir una aceleración media, en forma análoga a como se hizo con la definición de velocidad media.

4.17 ACELERACIÓN MEDIA

La aceleración media de una partícula en movimiento, durante un intervalo de tiempo Δt , es el cambio del vector velocidad $\Delta \vec{v}$, dividido entre el intervalo de tiempo:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} \quad (4.14)$$

Donde,

$\vec{v}_i$ = velocidad instantánea inicial t_i = tiempo inicial

$\vec{v}_f$ = velocidad instantánea final t_f = tiempo final

La cantidad $\vec{a}_m$ es un vector, ya que el mismo se obtiene al multiplicar el vector $\Delta \vec{v}$ por el escalar $1/\Delta t$, su dirección es la misma de la del vector $\Delta \vec{v}$ y su magnitud o módulo es $|\Delta \vec{v} / \Delta t|$.

La unidad de medida de la aceleración en el SI es m/s^2 , la cual se deriva del hecho que la aceleración es la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo y, puesto que la velocidad se mide en metros por segundo (m/s), entonces la razón de cambio será (m/s)/s, que se lee metros por segundo por segundo o, más comúnmente, la expresión indicada antes, m/s^2 , que se lee metros por segundo al cuadrado. Es importante aclarar que la expresión m/s^2 no indica claramente el sentido físico real del concepto de aceleración, como lo hace la expresión (m/s)/s, que nos indica cómo una partícula cambia

su rapidez en metros por segundo en cada segundo. Así, cuando decimos que un automóvil se desplazó en línea recta entre dos puntos A y B con una aceleración media de 4 m/s^2 , la conclusión desde el punto de vista de la Física es que el automóvil va cambiando, o aumentando su rapidez en cuatro metros por segundo, en cada segundo de tiempo. Es decir, en el primer segundo su rapidez es de 4 m/s , en el segundo siguiente o sea a los dos segundos su rapidez será 8 m/s , a los tres segundos será 12 m/s y así sucesivamente.

Observa que si un movimiento mantiene una aceleración constante durante un período largo, la velocidad de la partícula adquiriría valores fuera de todo uso práctico. En la vida real, las aceleraciones son siempre por períodos cortos de tiempo.

Ejemplo 4.10

La trayectoria del movimiento de un móvil, que se desplaza entre los puntos A y B, se muestra en la fig. 4.37. Las velocidades instantáneas del auto, calculadas en los puntos A y B, son:

$$\vec{v}_A = 15 \text{ m/s} \quad 60^\circ \text{ al norte del este}$$

$$\vec{v}_B = 25 \text{ m/s} \quad 25^\circ \text{ al norte del este}$$

Calcula la aceleración media del auto entre los puntos A y B, si el mismo tarda 3 segundos entre estos dos puntos.

Solución

Los vectores correspondientes a $\vec{v}_A$ y $\vec{v}_B$ pueden expresarse como:

$$\vec{v}_A = 15 \cos 60^\circ \vec{i} + 15 \sin 60^\circ \vec{j} = 7,5 \vec{i} + 12,99 \vec{j}$$

$$\vec{v}_B = 25 \cos 25^\circ \vec{i} + 25 \sin 25^\circ \vec{j} = 22,66 \vec{i} + 10,57 \vec{j}$$

La diferencia entre las velocidades anteriores es:

$$\Delta \vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = (22,66 - 7,5) \vec{i} + (10,57 - 12,99) \vec{j}$$

$$\Delta \vec{v}_{AB} = 15,16 \vec{i} - 2,42 \vec{j}$$

El módulo del vector $\Delta \vec{v}_{AB}$ es:

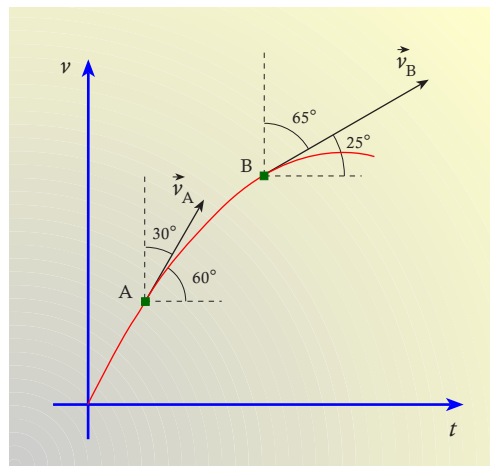


Fig. 4.37 Ejemplo 4.10. Velocidades instantáneas de un automóvil entre dos puntos A y B. La aceleración media entre esos dos puntos, se obtiene a partir de la diferencia $\Delta \vec{v}_{AB} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$.

$$|\Delta v_{AB}| = \sqrt{15,16^2 + 2,42^2} = \sqrt{229,83 + 5,86} = \sqrt{235,69}$$

$$|\Delta v_{AB}| = 15,35$$

Como la componente según el eje Y es negativa y según el eje X es positiva, el ángulo del vector resultante está situado en el cuarto cuadrante. Por tanto, para obtener este ángulo, restamos a 360° al ángulo dado por $\tan^{-1}(2,42/15,16) = 9,07^\circ$:

$$\theta = 360^\circ - \tan^{-1}\left(\frac{2,42}{15,16}\right) = 360^\circ - 9,07^\circ = 350,93^\circ$$

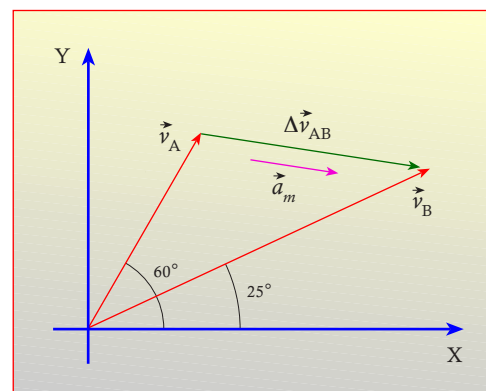


Fig. 4.38 La aceleración del móvil tiene una dirección que coincide con el cambio de velocidad, $\Delta \vec{v}_{AB}$.

Entonces, la forma polar del vector $\vec{v}_B - \vec{v}_A$ es:

$$\Delta \vec{v}_{AB} = (15,35; 350,93^\circ)$$

Como el móvil tarda 3 s en desplazarse desde el punto A al B, la aceleración media entre esos dos puntos estará dada por:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{\Delta t} = \frac{15,16\vec{i} - 2,42\vec{j}}{3} = 5,05\vec{i} - 0,81\vec{j}$$

$$\vec{a}_m = \langle 5,12; 350,93^\circ \rangle$$

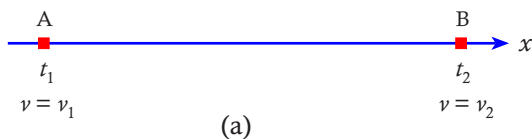
Se debe observar que $350,93^\circ$ corresponden a $-9,07^\circ$ y $\vec{a}_m$, puede expresarse, también, de la manera siguiente:

$$\vec{a}_m = (5,12; -9,07^\circ)$$

Es decir, el móvil cambia su velocidad 5,12 m por segundo, en cada segundo, con dirección de $9,07^\circ$ al sur del este, tal como se muestra en la fig. 4.38. Observa, además, que el vector aceleración es paralelo al vector velocidad, $\Delta \vec{v}_{AB}$.

4.18 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA ACCELERACIÓN MEDIA DE UNA PARTÍCULA EN UN ESPACIO UNIDIMENSIONAL

En forma similar a como se trató el caso de la interpretación geométrica de la velocidad, tratamos aquí la interpretación geométrica de la aceleración de una partícula que se mueve sobre una línea recta.

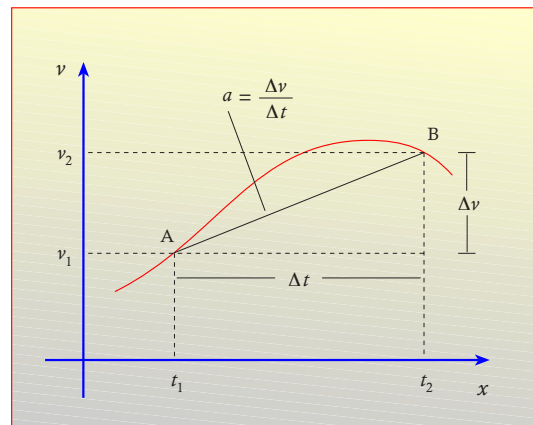


(a)

Fig. 4.39 a) Un auto se desplaza desde el punto A al punto B en línea recta. Las velocidades instantáneas para los instantes de tiempo t_1 y t_2 son v_1 y v_2 , respectivamente. b) Gráfica de la velocidad en función del tiempo: la pendiente de la recta que une a los puntos A y B es la aceleración media en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_2 - t_1$.

Recordemos que una partícula acelera si se dan cualesquiera de los siguientes casos: **a.** Un cambio en la magnitud del módulo o rapidez de la velocidad. **b.** Un cambio en la dirección de la velocidad y **c.** Un cambio simultáneo de la rapidez y dirección de la velocidad. Al moverse una partícula en línea recta, se elimina la posibilidad de cambiar la dirección de la velocidad; por lo tanto, la partícula acelera si ocurre un cambio en el módulo del vector velocidad.

Supongamos que nos desplazamos en línea recta en un auto desde el punto A al punto B, como se muestra en la figura 4.39. Se asume que el movimiento es acelerado debido a la constante variación de la velocidad; en este caso, por efectos de aumentar o reducir la rapidez por causas naturales de la vía (pendientes, puentes, etc.), durante el movimiento. Si sobre un plano cartesiano llevamos sobre el eje de las Y distintos valores de los vectores de la velocidad que hayamos medido en varios puntos de la trayectoria, e identificamos sobre el eje de las X los valores de los tiempos medidos para esos valores de la velocidad, podríamos obtener una curva como la mostrada en la figura 4.39(b), la cual es una representación de la función $v = f(t)$. Sobre esta curva, podemos ubicar el punto A, donde el módulo de la velocidad de la partícula es v_1 en el tiempo t_1 . Así mismo, podemos ubicar el punto B donde el módulo de la velocidad es v_2 en el tiempo t_2 . Si unimos con una recta los puntos A y B, obtenemos un triángulo rectángulo cuyos catetos son: $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ y $\Delta t = t_2 - t_1$. La



(b)

pendiente de la recta que une los puntos A y B, la cual coincide con la hipotenusa del triángulo, es $\Delta v / \Delta t$. Geométricamente, esta pendiente mide la inclinación de la recta. Por otra parte, como podemos ver, la relación $\Delta v / \Delta t$ es la expresión del módulo de la aceleración media, como se ha definido anteriormente. Por lo tanto, como en el caso de la interpretación geométrica que se hizo sobre la velocidad media, tenemos, igualmente, una interpretación geométrica de la aceleración media, donde se puede ver, adicionalmente, que el módulo de dicha aceleración depende del valor del intervalo de tiempo Δt , en forma similar a lo que ocurre en la gráfica posición-tiempo analizada para la velocidad media, v_m .

4.19 ACCELERACIÓN INSTANTÁNEA



Si se consideran intervalos de tiempo muy cortos, se habla de aceleración instantánea, que puede definirse como el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo Δt tiende a cero.

Observemos de nuevo la fig. 4.39(b), que se repite nuevamente como fig. 4.40. Si acercamos el punto B al punto A, en el límite de $\Delta v / \Delta t$, cuando Δt tiende a cero, la aceleración instantánea es:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (4.15)$$

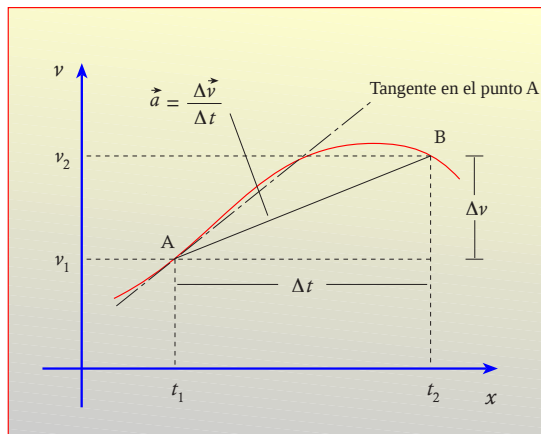
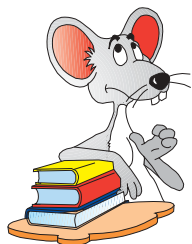


Fig. 4.40 La aceleración instantánea se define como el límite de la aceleración media cuando el intervalo de tiempo entre t_1 y t_2 se hace muy pequeño.

Es decir, la aceleración instantánea de una partícula, en el tiempo t , es el límite de su aceleración media $\Delta \vec{v} / \Delta t$, durante un intervalo de tiempo Δt , cuando Δt tiende a cero.

Si analizamos un poco más la figura 4.40, podemos ver que la aceleración instantánea en el punto A es igual a la tangente a la curva en ese punto o, lo que es lo mismo, igual a la pendiente de la tangente a la curva en ese punto. La aceleración puede, por lo tanto, ser positiva, cero o negativa, dependiendo del signo de la pendiente a la curva $v = f(t)$, en el punto y tiempo considerados.



PIENSA Y EXPLICA



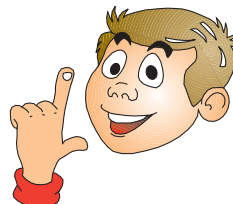
4.25 ¿Qué tipos de movimientos estudia la Cinemática?

4.26 ¿Cuál es la diferencia entre los métodos escalar y vectorial en la descripción del movimiento traslacional?

- 4.27** ¿Cuál es la diferencia entre los métodos gráfico y analítico en la representación vectorial?
- 4.28** Define rapidez media y escribe la relación matemática que la representa.
- 4.29** Define velocidad media, haciendo uso de la fig. 4.30.
- 4.30** ¿Cuál es la diferencia entre rapidez media y velocidad media?
- 4.31** ¿En qué unidades del Sistema Internacional de Medidas se expresan la rapidez media y la velocidad media?
- 4.32** En un movimiento con velocidad variable, explica cómo la secante entre dos puntos de la gráfica que representa el movimiento, equivale a la velocidad media entre los mismos.
- 4.33** Explica, mediante la gráfica de la fig. 4.33, el concepto de velocidad instantánea.
- 4.34** Define, de acuerdo a la relación 4.13, el concepto de velocidad instantánea.
- 4.35** Describe, de acuerdo con la fig. 4.34, cómo la velocidad instantánea puede ser negativa, cero o positiva?
- 4.36** ¿Puede la velocidad media ser negativa?
- 4.37** ¿Cómo es el gráfico $x - t$ para una partícula con velocidad constante?
- 4.38** ¿Cómo es el gráfico $v - t$ para una partícula con velocidad constante?
- 4.39** Explica la definición de aceleración media, según la relación (4.14).
- 4.40** ¿Por qué la unidad de aceleración (m/s)/s explica más claramente el concepto de aceleración que la unidad m/s²?
- 4.41** Si una partícula mantiene una aceleración constante por un largo período de tiempo, ¿qué pasaría con su velocidad?
- 4.42** Explica, a partir de la fig. 4.39, cómo se interpreta gráficamente la aceleración media de una partícula?
- 4.43** ¿Puede una partícula acelerada mantener una rapidez constante?
- 4.44** Se sabe que la luz viaja en línea recta en el vacío con una rapidez constante de 300.000 km/s. ¿Cuánto cambia su velocidad en 30 segundos?
- 4.45** ¿Cómo siente una persona que va en un vehículo el efecto de la aceleración?
- 4.46** En un vehículo, ¿cuál de estos elementos es un acelerador: el pedal, el volante, los frenos?



PROBLEMAS



4.7 La distancia entre Cumaná y Margarita es de, aproximadamente, 64 km. Si una lancha recorre esta distancia en 2 horas y 10 minutos, ¿cuál es la rapidez media de la lancha?

4.8 En el problema anterior, ¿qué podrías decir sobre la velocidad media de la lancha?

4.9 Un vehículo recorre 330 km en 4 horas.
a) ¿Cuál es su rapidez media? b) ¿Qué distancia recorrerá si mantiene esa rapidez media por 5 horas? c) ¿Cuánto tarda en cubrir una distancia de 500 km a esa rapidez media?

4.10 Un autobús se mueve con una rapidez media de 60 km/h durante 1 h; luego, viaja a 100 km/h durante las próximas 4 h y, finalmente, viaja a 70 km/h durante 2h. ¿Cuál es su rapidez media durante toda la trayectoria?

4.11 Si, en el problema anterior, el autobús se detiene por 0,5 h, ¿cuál es su rapidez media, si el recorrido es el mismo?

4.12 Una partícula que se mueve hacia la derecha en línea recta, partiendo de un punto A, recorre 10 m hasta llegar a un punto B. Luego, regresa hacia A en línea recta, hasta alcanzar otro punto C, alejado 2 m de A. Si la partícula tardó 10 s en ir de A hasta B y 8 s en ir de B hasta C, determina: a) La distancia total recorrida por la partícula. b) El tiempo total del recorrido. c) La rapidez media. d) El desplazamiento de la partícula. e) La velocidad media

4.13 Un automóvil realiza un viaje entre Cumaná y Caracas. La distancia aproximada del viaje es de 420 km. Los primeros 100 km son recorridos con una rapidez de 70 km/h. ¿Qué rapidez debe tener el vehículo en el resto del viaje para lograr un tiempo de 6 horas, durante todo el recorrido?

4.14 Si se toma como referencia el origen de un sistema cartesiano como el mostrado en la fig. 4.41, determina la velocidad media de la partícula en cada caso.

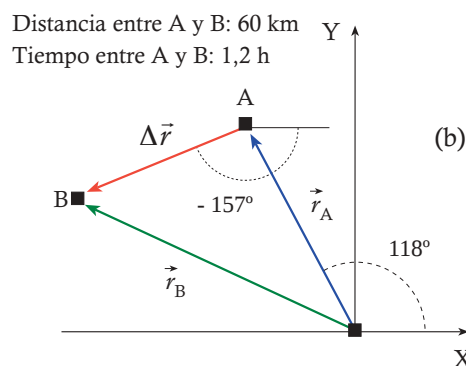
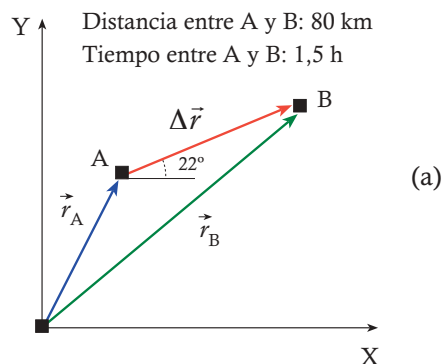


Fig. 4.41 Problema 4.14.

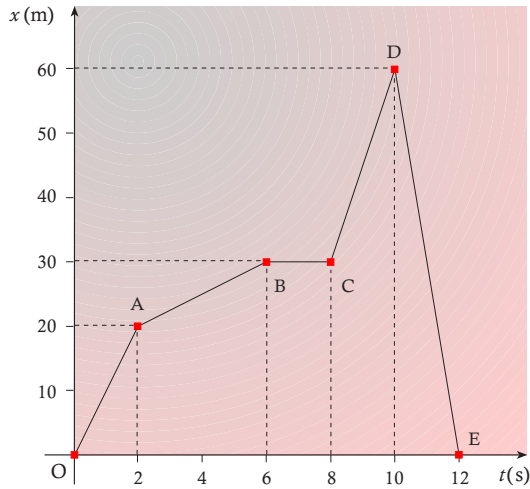


Fig. 4.42 Problema 4.15.

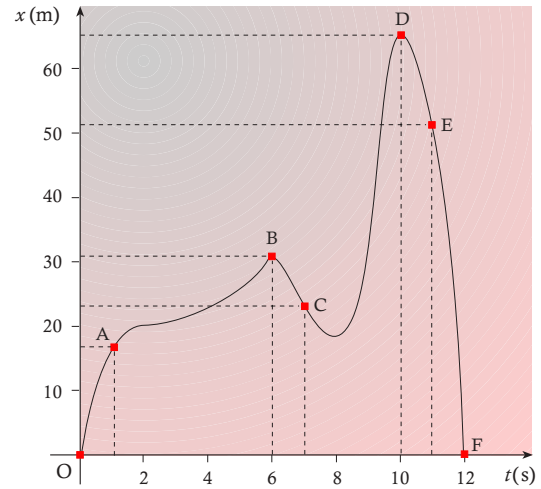
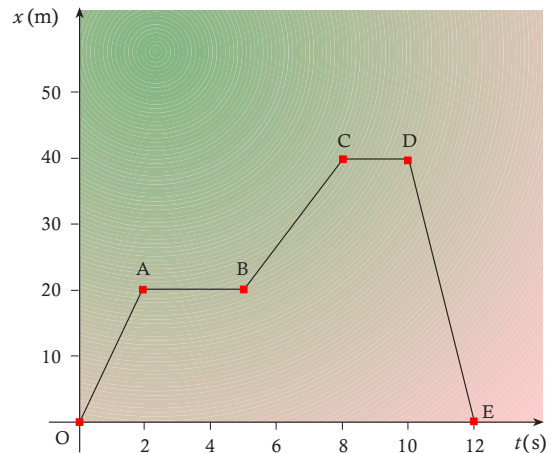


Fig. 4.43 Problema 4.16.

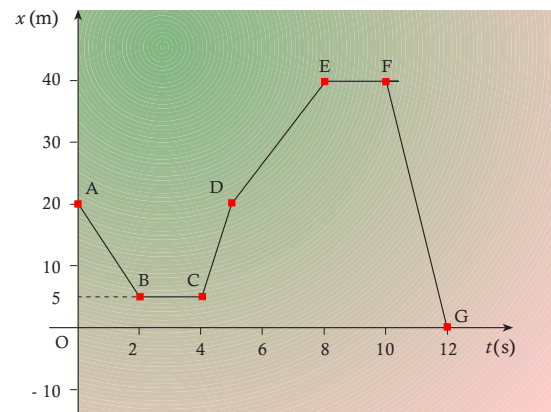
4.15 Una partícula se desplaza de acuerdo con la gráfica $x - t$ mostrada en la fig. 4.42. Tomando como referencia el origen del plano cartesiano, determina: **a)** La rapidez media y la velocidad media en cada intervalo de tiempo. **b)** La rapidez media y la velocidad media al final del recorrido. **c)** La velocidad instantánea en cada intervalo de tiempo.

4.16 a) ¿Cuál es la velocidad media aproximada en los intervalos OA, AB, BC, CD, DE y EF de la fig. 4.43? **b)** ¿Cuál es la velocidad media del recorrido total? **c)** ¿Cuál es el módulo aproximado de la velocidad instantánea en los puntos A, B, C, D y F? Toma como referencia al origen del plano cartesiano. *Nota: dibuja las tangentes en A, B, C, D y F y, sobre las mismas, toma coordenadas convenientes, según sea el caso.*

4.17 Para la fig. 4.44, determina: **a)** La distancia de la partícula con respecto al origen cuando $t = 2, 5, 8, 12$ s. **b)** El desplazamiento de la partícula al final del recorrido. **c)** La distancia total recorrida. **d)** La rapidez media y la velocidad media al completar el recorrido.



(a)



(b)

Fig. 4.44 Problema 4.17.

4.18 Una gandra de 25 m de largo se dirige desde Puerto la Cruz hacia Caracas. Al llegar a la entrada de un túnel de 120 m, disminuye su velocidad hasta 40 km/h, la cual mantiene constante durante todo el recorrido del túnel. ¿Cuánto tiempo tarda en salir completamente del túnel?

4.19 La fig. 4.45 representa la distancia recorrida por una partícula en función de t . Dibuja la gráfica de la velocidad de la partícula. ¿Cuál es la rapidez y la velocidad media al terminar el recorrido?

4.20 La gráfica de la velocidad durante la trayectoria de una partícula, fig. 4.46, muestra velocidades instantáneas entre los puntos A y B de 20 m/s, 23° hacia el norte del este y 80 m/s, 45° hacia el norte del este, respectivamente. ¿Cuál es la aceleración promedio de la partícula si el tiempo entre A y B es de 10 s?

4.21 Responde la pregunta del problema anterior si la gráfica de la velocidad instantánea es la mostrada en la fig. 4.47. El tiempo entre A y B es de 8 s.

4.22 Un móvil se desplaza de acuerdo a la fig. 4.48. a) ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad permanece constante, aumenta o disminuye? b) ¿Cuál es la aceleración media para los intervalos de tiempo acotados por O, A, B, C y D? c) ¿Qué podrías decir de la aceleración instantánea en esos intervalos? d) Dibuja la gráfica aceleración media - tiempo.

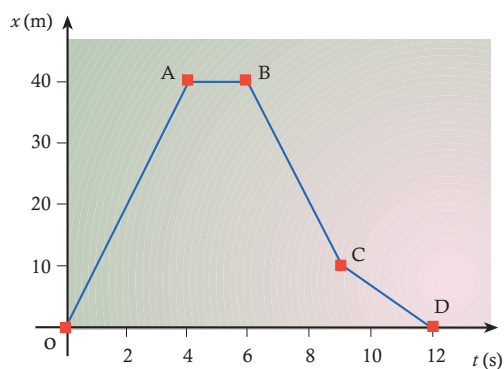


Fig. 4.45 Problema 4.19.

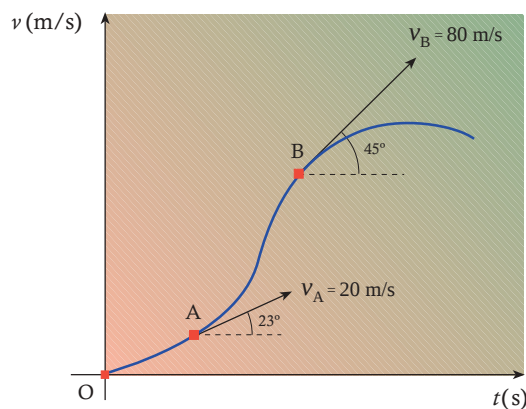


Fig. 4.46 Problema 4.20.

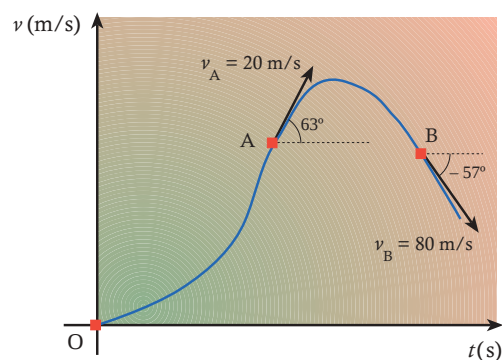


Fig. 4.47 Problema 4.21.

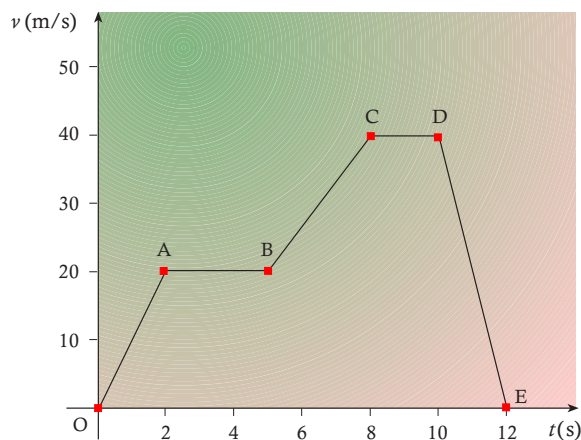
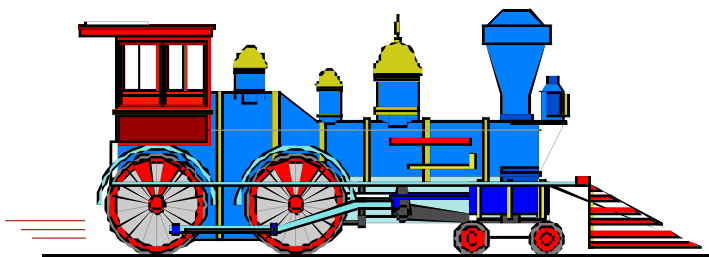


Fig. 4.48 Problema 4.22.

CAPÍTULO 5

Movimiento Rectilíneo



5.1 MOVIMIENTO RECTILÍNEO A VELOCIDAD CONSTANTE

El movimiento en línea recta, aunque en la práctica existe, está en realidad restringido a tiempos de ocurrencia pequeños. Es necesario tener en cuenta esto, para poder captar el sentido físico de la ecuación que describe este movimiento. El movimiento en línea recta elimina uno de los dos factores que pueden hacer variar el vector velocidad; a saber, el cambio de dirección; el otro factor: el módulo o magnitud del vector, puede ser mantenido invariable en un tiempo determinado, generalmente muy pequeño, como se ha dicho antes. Si la velocidad media de una partícula o cuerpo se mantiene constante en todos los intervalos de tiempo en un movimiento en línea recta, se dice que la partícula tiene *velocidad constante* o *velocidad uniforme*. Si determinamos que una partícula tiene velocidad uniforme, podemos prescindir de la notación vectorial en la expresión para la velocidad media y utilizar su módulo como una medida de la rapidez de la partícula. De esta forma, podemos escribir:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (5.1)$$

Es de hacer notar, entonces, que *en este caso la velocidad tiene una dirección invariable y su módulo corresponde a la rapidez de la partícula*.

Experimentalmente, podemos medir las distancias recorridas por una partícula en intervalos de tiempos iguales, en un movimiento con velocidad constante. Por ejemplo, si una partícula se desplaza a velocidad constante de 20 m/s en línea recta y tomamos me-

didias del tiempo en intervalos de 1 segundo en 6 puntos consecutivos, obtendremos resultados de las distancias recorridas, como los mostrados en la tabla 5.1.

La tabla 5.1 nos muestra que en el tiempo $t = 0$ la partícula inicia su movimiento y que, a medida que se incrementa el tiempo, el espacio recorrido se incrementa proporcionalmente. Como se puede ver, si duplicamos el tiempo, el espacio recorrido se duplica, si lo triplicamos, el espacio se triplica y así sucesivamente.

Tiempo	Posición
0	0
1	20
2	40
3	60
4	80
5	100
6	120

Tabla 5.1. Ejemplo de valores de la posición en función del tiempo, en un movimiento a velocidad constante.

Si sobre un plano cartesiano llevamos los valores de esta tabla, tomando sobre el eje de las ordenadas la variable dependiente, las posiciones de la partícula, y sobre el eje de las abscisas, la variable independiente, el tiempo, obtenemos una gráfica como se muestra en la fig. 5.1, donde podemos observar que los datos posición-tiempo están representados por una línea recta, que pasa por el origen de coordenadas.

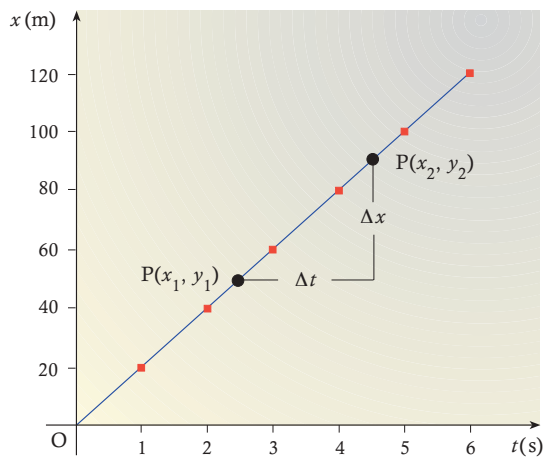


Fig 5.1 Gráfica posición - tiempo para la tabla 5.1.

La ecuación (5.1) podemos escribirla de la forma siguiente :

$$v_m = \frac{x_2 - x_1}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Despejando Δx :

$$\Delta x = v_m \Delta t \quad (5.2)$$

donde v_m es una constante. La relación (5.2) corresponde a una ecuación lineal de primer grado del tipo $y = mx$, cuya representación gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Ahora bien, en forma similar a como se trató la gráfica de la velocidad media, podemos darnos cuenta aquí que la pendiente de la recta de la fig. 5.1 en cualquier punto es $\Delta x / \Delta t$. La pendiente, m , es la misma para cualquier punto de la recta, puesto que existe una relación lineal entre el desplazamiento y el tiempo; es decir:

$$m = \frac{\Delta x_A}{\Delta t_A} = \frac{\Delta x_B}{\Delta t_B} = \dots = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \text{constante} \quad (5.3)$$

Tengamos en cuenta, por otra parte, que la relación desplazamiento/tiempo, está vinculada con la definición de velocidad, como se ha explicado antes. Por lo tanto, concluimos que en *el movimiento de una partícula que se desplaza en línea recta con velocidad constante, la pendiente de la recta posición - tiempo, en*

cualquier punto, corresponde al módulo de la velocidad de la partícula en ese punto.

Es conocido que la pendiente de una recta puede ser positiva, negativa o igual a cero. En los dos primeros casos, la partícula se mueve hacia la derecha o hacia la izquierda con respecto a un punto de referencia. En el último caso, la partícula no se mueve respecto al punto de referencia.

5.2 GRÁFICA DE LA VELOCIDAD CONSTANTE

Si en un plano cartesiano representamos en el eje de las ordenadas el valor de la velocidad constante de una partícula que se desplaza en línea recta y en el eje de las abscisas los diferentes intervalos de tiempo, obtenemos una gráfica como la mostrada en la fig. 5.2. En esta gráfica, vemos que los datos velocidad constante - tiempo están representados por una línea paralela al eje de los tiempos, lo cual es debido a que la velocidad es constante. En cualquier intervalo de tiempo, se puede ver una superficie rectangular, cuyos lados son la abscisa Δt y la ordenada corresponde a la velocidad constante.

La expresión de esta superficie es: $S = v\Delta t$, pero el producto es $v\Delta t = \Delta x$, donde Δx representa el desplazamiento de la partícula. Por lo tanto, en una gráfica de velocidad constante contra tiempo, *el área del rectángulo cuya altura es v y cuya anchura es Δt es igual al desplazamiento de la partícula, desde su posición inicial hasta su posición final en el intervalo de tiempo Δt .*

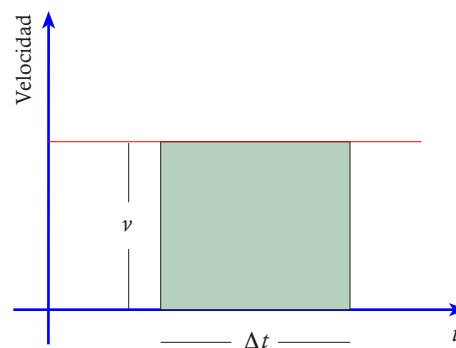


Fig 5.2 Gráfica velocidad - tiempo cuando la velocidad es uniforme

5.3 MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE ACELERADO

Un movimiento uniformemente acelerado es aquel en el cual la aceleración es constante. En la vida real no es común encontrar movimientos que tengan aceleración constante; sin embargo, un automóvil, cuando inicia su movimiento, en los primeros segundos puede considerarse que mantiene una aceleración constante. O bien, si el automóvil ya está en movimiento a una velocidad constante y, de repente, acelera para adelantar a otro auto, en ese tiempo de adelantamiento puede considerarse que logra una aceleración constante. En el mundo natural, la caída libre de los cuerpos en el espacio se realiza con una aceleración constante. El caso de la caída libre de los cuerpos, dada la enorme importancia que tiene para la Física, será tratado en detalle más adelante.

Haciendo referencia a la relación (4.14), se tiene que la aceleración media de una partícula en movimiento acelerado es:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} \quad (5.4)$$

Como estamos tratando la aceleración de una partícula en un movimiento rectilíneo y, además, *con la condición de que la aceleración sea constante, la aceleración media en cualquier punto es igual a la aceleración instantánea*. Por lo tanto, la velocidad aumenta o disminuye con una razón de cambio igual, durante todo el movimiento.

Como en un movimiento rectilíneo los conceptos de rapidez y velocidad se pueden aplicar indistintamente, ya que la variación de la velocidad sólo puede deberse a un cambio del valor de su módulo o rapidez, es común expresar la aceleración según el método escalar.

Así, la ecuación (5.4) se transforma en:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} \quad (5.5)$$

Usualmente, la relación anterior se utiliza con las siguientes consideraciones:

1. Se considera que el movimiento acelerado se inicia cuando $t_i = 0$.
2. La medición final del movimiento tiene lugar cuando $t_f = t$, donde t es un tiempo cualquiera.
3. Para $t_i = 0$, la velocidad inicial, v_i , se designa como v_o .
4. A la velocidad final, para un tiempo cualquiera, t , se le designa como $v_f = v$ y especifica el valor de la velocidad para cualquier tiempo t .

De acuerdo a las consideraciones anteriores, la relación (5.5) tendrá la forma:

$$a = \frac{v - v_o}{t} \quad (5.6)$$

Despejando la velocidad:

$$v = v_o + at \quad (5.7)$$

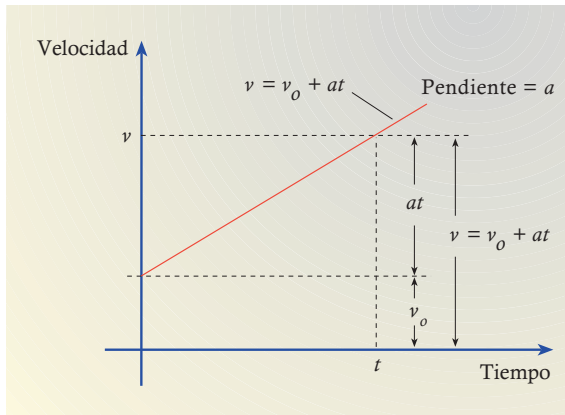
Según la relación (5.7), si conocemos la velocidad inicial y la aceleración constante de una partícula que se mueve en un espacio rectilíneo en una dimensión, podemos calcular la velocidad en cualquier instante de tiempo t .

Si el móvil inicia su movimiento acelerado desde el reposo, la velocidad inicial, v_o , será nula y la relación (5.7) se transforma en:

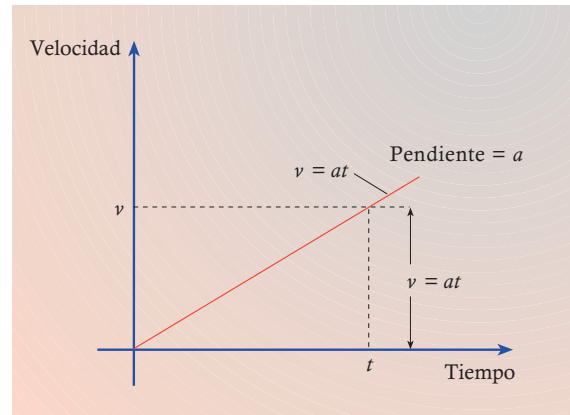
$$a = \frac{v - 0}{t} \Rightarrow v = at \quad (5.8)$$

5.4 GRÁFICA DE LA ACELERACIÓN CONSTANTE

En forma similar a la representación gráfica de la aceleración media, el movimiento uniformemente



(a)



(b)

Fig 5.3 Gráfica velocidad - tiempo cuando la aceleración es constante. (a) Movimiento con velocidad inicial v_o . (b) Movimiento con velocidad inicial nula.

acelerado se puede representar en un sistema de coordenadas cartesianas, con lo cual se obtiene una interpretación geométrica de este tipo de movimiento. Si se toman sobre el eje Y los valores de las velocidades y en el eje de las X los valores del tiempo, obtenemos, como se muestra en la fig. 5.3, la representación gráfica de las ecuaciones deducidas antes: las ecuaciones (5.7) y (5.8).

La figura 5.3(a) representa la velocidad en función del tiempo, cuando el movimiento se inicia con una velocidad inicial v_o y con aceleración constante, donde v crece uniformemente con el tiempo t . La gráfica es una línea recta cuya pendiente es la aceleración a . La fig. 5.3(b) representa el caso cuando $v_o = 0$ para $t = 0$ y la velocidad v crece igualmente uniformemente con el tiempo t . La gráfica es

igualmente una línea recta que pasa por el origen de coordenadas, donde la pendiente de esta recta es la aceleración, a , de la partícula. Si graficamos la aceleración constante contra el tiempo, se obtiene una línea recta con pendiente cero, como se muestra en la fig. 5.4.

La aceleración constante en un movimiento rectilíneo puede ser positiva o negativa. La aceleración es positiva si la velocidad del móvil crece uniformemente o si la pendiente de la recta que representa la gráfica de v contra t , es positiva como se muestra en la fig. 5.3. La aceleración es negativa si la velocidad decrece uniformemente, lo cual se conoce como movimiento desacelerado. La fig. 5.5 muestra este caso, donde se puede ver que la velocidad v decrece con el tiempo t , a partir de la la velocidad inicial v_o .

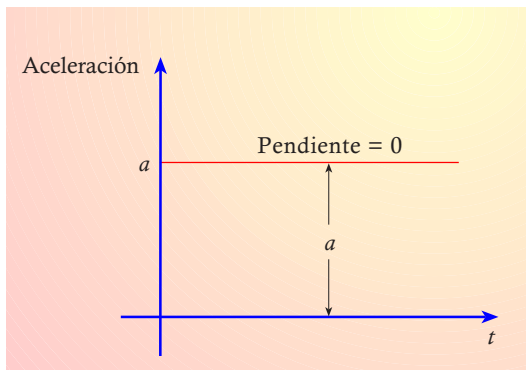


Fig 5.4 Gráfica aceleración - tiempo cuando la aceleración es constante. La pendiente es igual a cero.

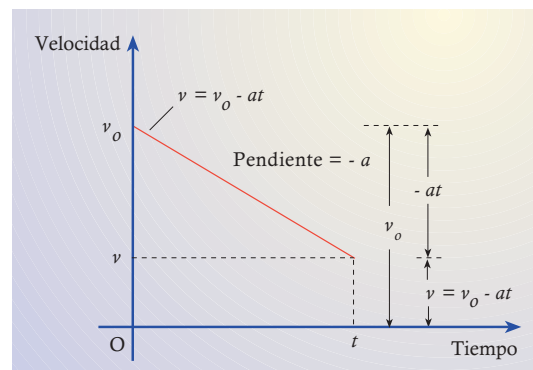


Fig 5.5 Gráfica velocidad - tiempo cuando la aceleración es constante y negativa.

5.5 VELOCIDAD MEDIA EN EL MOVIMIENTO CON ACCELERACIÓN CONSTANTE

La aceleración constante no es otra cosa que el cambio uniforme creciente o decreciente del valor de la velocidad en un intervalo de tiempo Δt . Cuando se tiene un movimiento con aceleración constante, se puede expresar la velocidad media de una partícula, en cualquier intervalo de tiempo, como el valor medio de la velocidad inicial y la velocidad final. Observemos lo siguiente: supongamos que una partícula se mueve con aceleración constante de 8 m/s^2 y con una velocidad inicial $v_o = 15 \text{ m/s}$. Aplicando la relación (5.7) para los tiempos $t = 0, 1, 2, 3, 4$, y 5 s , las velocidades son 15, 23, 31, 39, 47, y 55 m/s , respectivamente. El valor promedio de estas velocidades se calcula por el conocido método de sumar las cantidades y dividir entre el número de las mismas, obteniendo en este caso el promedio de 35 m/s . Por otra parte, si calculamos la media entre la velocidad final y la velocidad inicial, obtenemos: $(55+15)/2 = 35 \text{ m/s}$, que es el mismo valor del promedio calculado. De acuerdo con estos resultados, cuando una partícula se mueve con aceleración constante, la velocidad media se expresa como:

$$v_m = \frac{v_o + v}{2} \quad (5.9)$$

Es importante destacar que esta ecuación es válida siempre que se mantenga la aceleración constante, es decir que la velocidad varíe linealmente con el tiempo.

5.5.1 Desplazamiento en función del tiempo con aceleración constante

La ecuación (5.1) la podemos generalizar y escribirla así:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow v_m = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

Con las condiciones ya descritas ($x_f = x$, $x_i = x_o$, $t_f = t$, $t_i = 0$):

$$v_m = \frac{x - x_o}{t} \quad (5.10)$$

Igualando las ecuaciones (5.9) y (5.10) se obtiene:

$$\frac{v_o + v}{2} = \frac{x - x_o}{t} \Rightarrow x = x_o + \frac{1}{2}(v + v_o)t \quad (5.11)$$

Con frecuencia se escoge el punto de referencia de tal manera que $x_o = 0$ cuando $t_o = 0$, con lo cual la relación (5.11) toma la forma:

$$x = \frac{1}{2}(v + v_o)t \quad (5.12)$$

5.5.2 Desplazamiento en función del tiempo

Si sustituimos la ecuación (5.7) en la (5.11) se obtiene:

$$x = x_o + \frac{1}{2}(v_o + v_o + at)t = x_o + \frac{1}{2}(2v_o + at)t$$

$$\Rightarrow x = x_o + v_o t + \frac{1}{2}at^2 \quad (5.13)$$

Si $x_o = 0$ cuando $t_o = 0$, la relación anterior se convierte en:

$$x = v_o t + \frac{1}{2}at^2 \quad (5.14)$$

5.5.3 Desplazamiento en función de la velocidad

Despejando el tiempo de la ecuación (5.7) y sustituyendo en (5.11) se obtiene:

$$t = \frac{v - v_o}{a} \Rightarrow x = x_o + \frac{1}{2}(v + v_o)\frac{v - v_o}{a}$$

$$x = x_o + \frac{v^2 - v_o^2}{2a} \quad (5.15)$$

Si $x_o = 0$ cuando $t_o = 0$, tendremos:

$$x = \frac{v^2 - v_o^2}{2a} \quad (5.16)$$

5.5.4 Velocidad en función del desplazamiento

Si de la relación anterior, despejamos la velocidad v para un tiempo cualquiera t :

$$v^2 = v_o^2 + 2ax \Rightarrow v = \sqrt{v_o^2 + 2ax} \quad (5.17)$$

Ejemplo 5.1

Una persona va desde un punto A a otro punto B con una rapidez constante de 2 m/s. Se devuelve desde B hasta A con una rapidez constante de 3 m/s. **a)** ¿Cuál es la rapidez media del recorrido? **b)** ¿Cuál es la velocidad media para el mismo recorrido?

Solución

a) Supongamos que la distancia entre A y B es d . Si llamamos t_1 al tiempo que tarda la persona en ir desde A hasta B con una rapidez de 2 m/s, podemos escribir:

$$\frac{d}{t_1} = 2 \text{ m/s} \quad (5.18)$$

Similarmente, en el recorrido desde B hasta A, suponemos que la persona tarda un tiempo t_2 , por lo que la rapidez constante de 3 m/s puede expresarse como:

$$\frac{d}{t_2} = 3 \text{ m/s} \quad (5.19)$$

Como la distancia total recorrida por la persona es $2d$, la rapidez media resultará de dividir esta distancia por el tiempo empleado, $t_1 + t_2$:

$$v_m = \frac{2d}{t_1 + t_2} \quad (5.20)$$

De las relaciones (5.18) y (5.19), podemos obtener las expresiones para t_1 y t_2 :

$$t_1 = \frac{d}{2} \quad t_2 = \frac{d}{3}$$

Sustituyendo en (5.20), tendremos:

$$v_m = \frac{2d}{t_1 + t_2} = \frac{2d}{\frac{d}{2} + \frac{d}{3}} = \frac{2d}{\frac{3d + 2d}{6}} = \frac{12d}{5d} = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ m/s}$$

Hay que observar que si hubiésemos tratado de calcular la velocidad media como el promedio de las velocidades de ida y vuelta, hubiéramos obtenido un valor equivocado e igual a:

$$v_m = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{2 + 3}{2} = 2,5 \text{ m/s}$$

b) La velocidad media para el recorrido total es cero, puesto que la persona regresa al punto A de partida.

Ejemplo 5.2

La gráfica de la fig. 5.6 muestra la distancia recorrida por las partículas A y B, que se desplazan con movimiento rectilíneo, en función del tiempo. **a)** Determina las velocidades de las partículas a partir de la gráfica. ¿Cuál es el significado del signo de las pendientes de las dos rectas? **b)** Si ambas partículas parten cuando $t = 0$, ¿cuándo se encuentran? **c)** ¿A qué distancia se encontraban las partículas al iniciarse el movimiento?

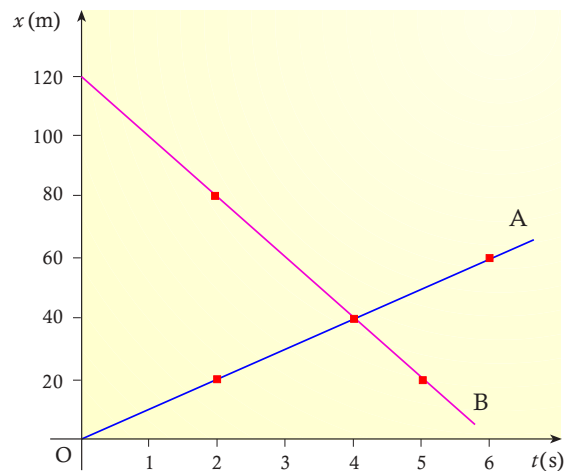


Fig 5.6 Gráfica distancia - tiempo para el ejemplo 5.2.

Solución

a) En la fig. 5.7 se indica la forma de calcular las velocidades de las partículas mediante la determinación de las pendientes de las rectas que representan sus movimientos:

$$\text{Recta A: } m_A = \frac{30 - 10}{3 - 1} = \frac{20}{2} = 10 \text{ m/s}$$

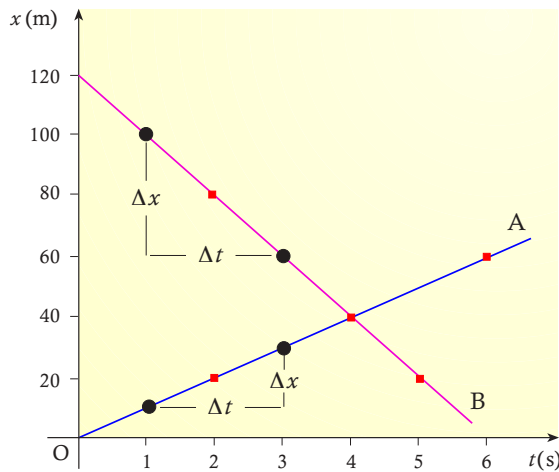


Fig 5.7 Cálculo de las pendientes para las partículas A y B.

Para la recta B:

$$\text{Recta B: } m_B = \frac{100 - 60}{1 - 3} = \frac{40}{-2} = -20 \text{ m/s}$$

El cálculo de las pendientes de las rectas nos dice que la partícula A se aleja del punto de referencia, en este caso el origen del sistema de coordenadas, con una rapidez de 10 m/s. En tanto, la partícula B se acerca al punto de referencia con una rapidez de 20 m/s. En el primer caso, el signo de la pendiente es positivo y en el segundo caso, negativo. Podemos deducir, entonces, que si la pendiente es positiva, la partícula se aleja del origen, mientras que si es negativa, la partícula se acerca al origen. Esto puede deducirse también del gráfico, puesto que a medida que el tiempo transcurre, la posición de la partícula está más alejada de la referencia, en el caso de la partícula A y más cercana a la referencia, en el caso de la partícula B. Observa que las velocidades de las partículas pueden ser expresadas vectorialmente como:

$$\vec{v}_A = 10\vec{i} \text{ m/s} \quad \vec{v}_B = -20\vec{i} \text{ m/s}$$

b) El punto de encuentro tiene lugar cuando la distancia recorrida por ambas partículas es la misma. Esto se expresa en el gráfico por el punto de intersección de las dos rectas. Es decir, las partículas están en el punto $t = 4$ s. Para este momento, ambas partículas han recorrido 40 m.

c) Cuando se inicia el movimiento ($t = 0$), la

partícula A se encontraba en el origen de coordenadas ($x = 0$), mientras que la partícula B, cuando $t = 0$, se hallaba a 120 m del origen ($x = 120$). Por tanto, las partículas se encuentran a una distancia de 120 m al comenzar el movimiento.

Ejemplo 5.3

La fig. 5.8 muestra una gráfica de velocidad - tiempo del movimiento de una partícula. a) ¿Cuál es la velocidad de la misma. b) ¿Cuál es la distancia recorrida por la partícula entre $t = 2$ s y $t = 5$ s?

Solución

a) Como se puede ver en la fig. 5.8, se trata de un movimiento rectilíneo con velocidad uniforme, por lo que la velocidad permanece constante durante todo el tiempo. De dicha figura, se deduce que la velocidad es de 30 m/s.

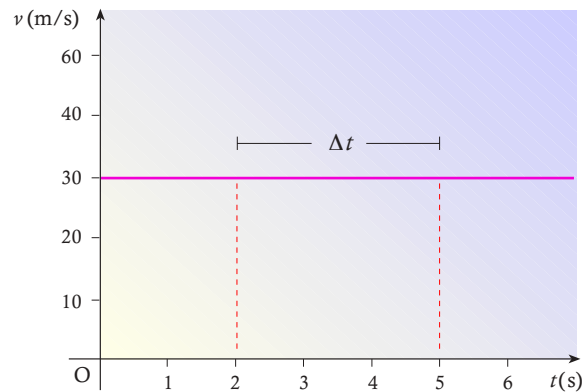


Fig 5.8 Gráfica velocidad - tiempo para el ejemplo 5.3.

b) La distancia recorrida por la partícula, entre $t = 2$ s y $t = 5$ s, puede determinarse calculando el área del rectángulo delimitado en la figura; es decir:

$$d = v\Delta t = (30 \text{ m/s})(5 - 2)\text{s} = 30 \cdot 3 \text{ m} = 90 \text{ m}$$

Ejemplo 5.4

Un vehículo que se desplaza en una trayectoria rectilínea pasa por un punto de observación, a una velocidad de 70 km/h, la cual mantiene constante

por una hora; se detiene por 15 minutos y regresa, pasando nuevamente por el punto de observación. Durante el regreso, la velocidad es constante e igual a 50 km/h. **a)** Dibuja la gráfica de la velocidad en función del tiempo. **b)** Dibuja la gráfica de la distancia recorrida en función del tiempo.

Solución

En la fig. 5.9 se muestra la gráfica $v - t$, tomando el origen de coordenadas como el punto de observación o referencia. Como se trata de velocidades constantes, la gráfica consiste de segmentos de recta paralelos al eje de tiempos. El primer segmento corresponde a $v = 70$ km/h y se extiende desde $t = 0$ hasta $t = 1$ h. El segundo segmento va desde $t = 1$ h hasta $t = 1,25$ h. En este caso, la velocidad es nula por estar el vehículo detenido. El tercer segmento tiene un valor de -50 km/h, donde el signo negativo indica que el vehículo está regresando al punto de observación. Para determinar la longitud de este último segmento, debemos primero calcular la distancia recorrida por el vehículo, luego que pasó por el punto de observación. Como tardó 1 hora en recorrer la distancia, antes de detenerse, esa distancia está dada por:

$$x = v \cdot t \quad \Rightarrow \quad d = 70 \text{ km/h} \cdot 1 \text{ h} = 70 \text{ km}$$

Cuando el vehículo se devuelve, recorre esa misma distancia, pero a una velocidad de 50 km/h. El

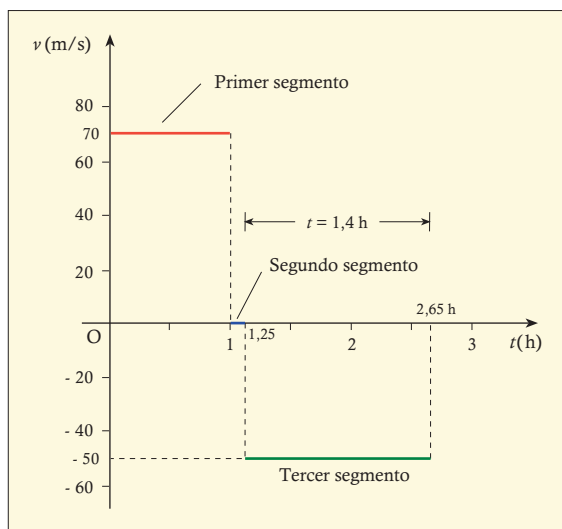


Fig 5.9 Gráfica velocidad - tiempo para el ejemplo 5.4.

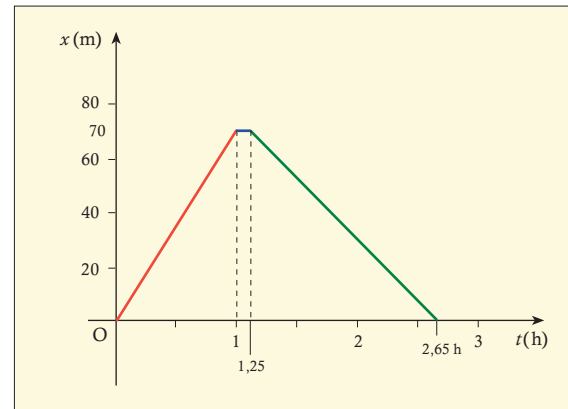


Fig 5.10 Gráfica velocidad - tiempo para el ejemplo 5.4.

tiempo que tarda en recorrerla es:

$$t = \frac{x}{v} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{70 \text{ km}}{50 \text{ km/h}} = \frac{7}{5} \text{ h} = 1,40 \text{ h}$$

Este último valor explica la extensión del tercer segmento de la fig. 5.9.

b) Para dibujar la gráfica $x - t$, basta con llevar a un eje de coordenadas cartesianas los distintos valores de la distancia en los intervalos de tiempo correspondientes. Esto se muestra en la fig. 5.10. Así, para $t = 0$, $x = 0$ y para $t = 1$ h, $x = 70$ km (primer segmento).

Para el segundo segmento, la distancia recorrida es igual a cero, puesto que el vehículo está detenido y se mantiene a una distancia de 70 km del punto de observación.

Finalmente, el tercer segmento va desde $x = 70$ km, cuando $t = 1,25$ h hasta $t = 2,65$ h, cuando $x = 0$ km.

Hay que resaltar que, en este ejemplo, x siempre adquiere valores positivos, ya que el vehículo se mueve constantemente hacia un lado del punto de referencia. De pasar el vehículo hacia el otro lado, los valores de x podrían ser negativos. De todas formas, es importante destacar que, aunque x puede ser positiva o negativa, las distancias recorridas serán invariablemente positivas.

Ejemplo 5.5

La gráfica de la fig. 5.11 muestra la aceleración de una partícula que parte del reposo. **a)** Dibuja la gráfica $v - t$. **b)** ¿Cuál es la velocidad de la partícula cuando $t = 8$ s y $t = 18$ s. **c)** ¿Qué distancia recorrió la partícula durante todo el trayecto?

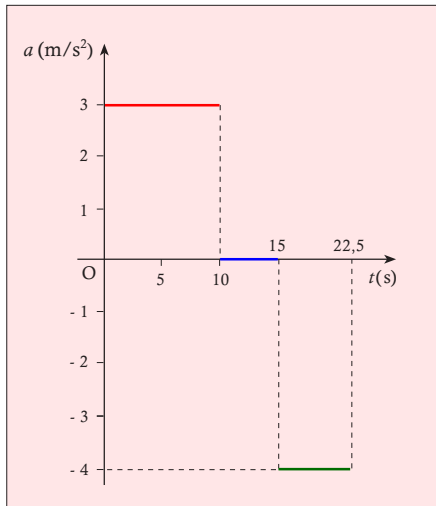


Fig 5.11 Gráfica aceleración - tiempo para el ejemplo 5.5.

Solución

a) Haremos referencia a las gráficas de las figs. 5.11 y 5.12 para los distintos intervalos de tiempo. De acuerdo con la fig. 5.11, el primer tramo, desde $t = 0$ hasta $t = 10$ s, la aceleración es constante e igual a 3 m/s^2 . Esto indica que la velocidad aumenta

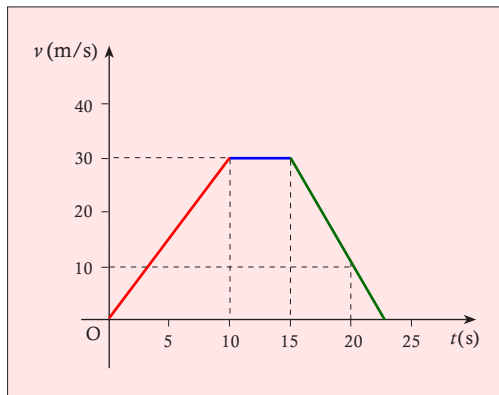


Fig 5.12 Gráfica velocidad - tiempo para el ejemplo 5.5.

3 m/s cada segundo en ese intervalo. Como la partícula parte del reposo, su velocidad inicial es cero y la relación que se aplica es:

$$v = at$$

De acuerdo a esta expresión cuando $t = 0$, $v = 0$ y cuando $t = 10$ s, tendremos:

$$t = 10 \Rightarrow v = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 10 \text{ s} = 30 \text{ m/s}$$

Cuando $t = 10$ s, la aceleración se hace igual a cero y la partícula mantiene una velocidad constante e igual a 30 m/s , que se extiende hasta $t = 15$ s.

Después de $t = 15$ s, la aceleración se hace negativa. Es decir, la partícula desacelera. Al inicio de este tramo del movimiento, la expresión para la velocidad se puede deducir de la relación (5.5):

$$v_f = v_i + a(t_f - t_i)$$

Para este caso, $v_i = 30 \text{ m/s}$, $a = -4 \text{ m/s}^2$, $t_i = 15$ s, $t_f = t$, $v_f = v$. Sustituyendo en la relación anterior:

$$v = 30 - 4(t - 15)$$

La relación anterior corresponde a una línea recta, por lo que bastan 2 puntos para graficarla:

$$t = 15 \text{ s} \Rightarrow v = 30 \text{ m/s}$$

$$t = 20 \text{ s} \Rightarrow v = 30 - 4(20 - 15) = 30 - 20 = 10 \text{ m/s}$$

b) Cuando $t = 8$ s, estamos en el primer segmento del tiempo y se aplica la relación $v = at$:

$$v = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 8 \text{ s} = 24 \text{ m/s}$$

Cuando $t = 18$ s, podemos aplicar la relación $v_f = v_i + a(t_f - t_i)$, correspondiente al tercer tramo del movimiento:

$$v = 30 - 4(18 - 15) = 30 - 4 \cdot 3 = 18 \text{ m/s}$$

c) La distancia recorrida puede ser calculada determinando el área bajo la curva $v - t$ de la fig. 5.12. Entre $t = 0$ y $t = 10$, tendremos un triángulo rectángulo de base 10 y altura 30. Entre $t = 10$ y $t = 15$, el área corresponde a un rectángulo y, finalmente, a partir de $t = 15$ s, tenemos otro

triángulo. Para determinar el punto de corte con el eje de tiempo para este último caso, usamos la relación $v = 30 - 4(t - 15)$ con $v = 0$. De esta manera, obtenemos:

$$0 = 30 - 4(t - 15) \Rightarrow -30 = -4(t - 15)$$

$$t - 15 = \frac{30}{4} = 7,5 \Rightarrow t = 7,5 + 15 = 22,5 \text{ s}$$

Entonces, el área bajo la curva $v - t$ está dada por:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 30 + (15 - 10) \cdot 30 + \frac{1}{2} \cdot (22,5 - 15) \cdot 30 = \\ &= 150 + 150 + 112,5 = 412,5 \text{ m} \end{aligned}$$

Ejemplo 5.6

Una partícula tiene una velocidad de 50 m/s, cuando $t = 0$. A partir de ese momento, comienza a disminuir su velocidad hasta detenerse cuando $t = 20$ s. ¿Cuál es su aceleración media? ¿Qué significa el signo negativo de la respuesta?

Solución

Las condiciones iniciales son $t_i = 0$, $v_i = 50$ m/s. Como la partícula se detiene transcurridos 20 s, tendremos: $t_f = 20$ s y $v_f = 0$. Usando la relación (5.5) con $v_f = 0$:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i} = \frac{0 - 50}{20 - 0} = -2,5 \text{ m/s}^2$$

El signo negativo indica que el movimiento es desacelerado; es decir, la partícula pierde velocidad a medida que avanza.

Ejemplo 5.7

En la fig. 5.13 una partícula parte del reposo desde el extremo superior de un plano inclinado y mantiene una aceleración constante hasta llegar al extremo inferior en un tiempo de 4 s. Si la longitud del plano inclinado es de 4 m, a) ¿Cuál es la aceleración de la partícula? b) ¿Cuál es su velocidad al llegar al extremo inferior?

Solución

Observa que el movimiento, a pesar de tener lugar a lo largo de un plano inclinado, es rectilíneo.

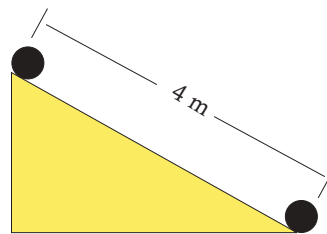


Fig 5.13 Ejemplo 5.7.

a) Usando la relación (5.14), con $x_o = 0$ y $v_o = 0$:

$$x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \cdot 4}{4^2} = \frac{8}{16} = 0,5 \text{ m/s}^2$$

b) De acuerdo con (5.17), con $v_o = 0$:

$$v = \sqrt{2 \cdot 0,5 \cdot 4} = \sqrt{4} = 2 \text{ m/s}$$

Ejemplo 5.8

Un vehículo que se desplaza a una velocidad constante de 72 km/h encuentra una colina y desacelera a razón de 4 m/s cada segundo. ¿Qué distancia recorrerá el vehículo antes de detenerse? ¿Cuánto tarda en detenerse?

Solución

Se tiene:

$$v_o = 72 \text{ km/h} = \frac{72 \cdot 1.000 \text{ m}}{3.600 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}$$

Como el vehículo comienza a desacelerar cuando encuentra la colina, la aceleración es negativa y su valor es:

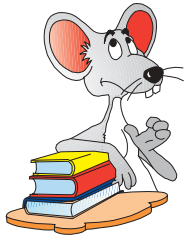
$$a = -4 \text{ m/s}^2$$

Dado que el vehículo se detiene en un momento específico, su velocidad final será nula en ese instante. Usando la relación (5.17), con $v = 0$:

$$0 = v_o^2 + 2ax \Rightarrow x = -\frac{v_o^2}{2a} = -\frac{20^2}{2 \cdot (-4)} = 50 \text{ m}$$

El tiempo que tarda en detenerse se puede hallar mediante la relación (5.7) con $v = 0$:

$$0 = v_o + at \Rightarrow t = -\frac{v_o}{a} = -\frac{20 \text{ m/s}}{-4 \text{ m/s}^2} = 5 \text{ s}$$



PIENSA Y EXPLICA

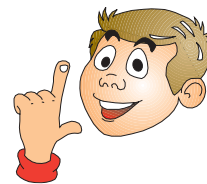


- 5.1** ¿Cuándo se dice que una partícula tiene velocidad constante o uniforme?
- 5.2** ¿Por qué podemos prescindir de la notación vectorial en el caso de la velocidad uniforme?
- 5.3** En la gráfica de la fig. 5.1, ¿qué relación hay entre la pendiente de la recta y el módulo de la velocidad?
- 5.4** En el caso del movimiento rectilíneo uniforme, ¿qué significa que la pendiente de la recta que representa el movimiento tenga pendiente positiva, negativa o nula?
- 5.5** Explica la gráfica de la velocidad constante, de la fig. 5.2 y la razón por la cual el área del rectángulo representa el desplazamiento de una partícula.
- 5.6** ¿Qué significa la expresión "movimiento rectilíneo uniformemente acelerado"?

- 5.7** ¿Cuál es la aceleración de una partícula con velocidad constante?
- 5.8** ¿Por qué en el movimiento rectilíneo uniforme podemos expresar comúnmente a la aceleración como un escalar? Explica cómo se pasa de la relación (5.4) a la relación (5.5).
- 5.9** ¿Por qué decimos que en el movimiento rectilíneo uniforme la aceleración media es igual a la aceleración instantánea?
- 5.10** Explica por qué las gráficas de la fig. 5.3 representan a las relaciones (5.7) y (5.8).
- 5.11** Mediante la combinación apropiada de fórmulas, deduce las relaciones (5.11), (5.13), (5.15) y (5.17).



PROBLEMAS



- 5.1** Un ciclista se mueve hacia el norte durante media hora con una velocidad de 30 km/h. Se detiene a descansar por 15 minutos y, luego, reanuda su viaje, recorriendo 10 km en 0,5 h. **a)** ¿Cuál fue su velocidad media? **b)** ¿Qué distancia recorrió durante su desplazamiento?

- 5.2** Luis Apuradito va en línea recta desde una esquina A hasta otra B, distantes 28 m, con una velocidad constante de 7 m/s y, luego, se regresa en línea recta desde B hasta A con una velocidad de 4 m/s. ¿Cuáles son su velocidad media y su rapidez media en el recorrido total?

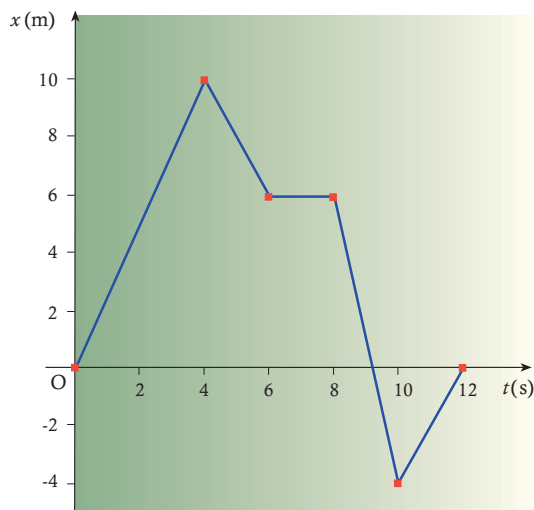


Fig. 5.14 Problema 5.2.

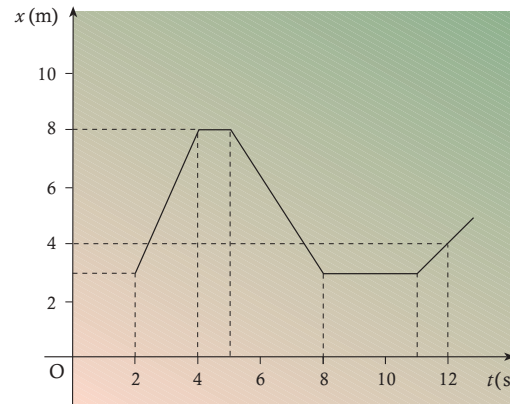


Fig 5.15 Problema 5.8.

5.3 Una partícula se mueve, según la figura 5.14. **a)** ¿Es el movimiento rectilíneo uniforme? **b)** ¿Cuál es la distancia total recorrida por la partícula? **c)** ¿A qué distancia del origen se encuentra la partícula cuando $t = 12$ s? **d)** Determina la velocidad media de la partícula en los siguientes intervalos de tiempo: $t = 0$ y $t = 4$ s; $t = 0$ y $t = 8$ s; $t = 2$ y $t = 10$ s. Toma el origen O como referencia.

5.4 Una partícula se desplaza en línea recta a 40 m/s durante un tiempo de 20 s. **a)** Dibuja la gráfica $v - t$. **b)** Mediante el gráfico, determina la distancia recorrida en 15 s. **c)** Cuando la partícula se encuentra a 100 m del punto de referencia, ¿qué tiempo ha transcurrido?

5.5 Un vehículo se mueve en línea recta por una autopista con una velocidad de 80 km/h durante 0,5 h. Se detiene por 15 min y se devuelve con velocidad constante de 75 km/h por 15 min. Dibuja la gráfica $v - t$ y determina la distancia total recorrida.

5.6 Dos corredores, separados por una distancia de 100 m, parten simultáneamente a encontrarse desde los extremos A y B de una pista, con velocidades de 7 m/s y 8 m/s, respectivamente. **a)** ¿Cuándo se cruzan los corredores? **b)** ¿Qué distancia los separa del extremo A en ese momento? **c)** Dibuja la gráfica $x - t$, correspondiente, y señala el punto de encuentro.

5.7 Se lanza una partícula en línea recta con una velocidad de 25 m/s y, 10 s más tarde, se lanza otra en la misma dirección y velocidad de 40 m/s. **a)** ¿Cuándo se produce el encuentro? **b)** ¿A qué distancia del punto de lanzamiento se encuentran las dos partículas?

5.8 Una partícula se desplaza en el tiempo, de acuerdo con la fig. 5.15. **a)** ¿Cuál es la velocidad media entre $t = 2$ s y $t = 6$ s. **b)** Determina la velocidad instantánea para $t = 4$ s. **c)** ¿Para qué valores del tiempo la velocidad instantánea es igual a cero? **d)** ¿En qué intervalos de tiempo la velocidad es positiva o negativa?

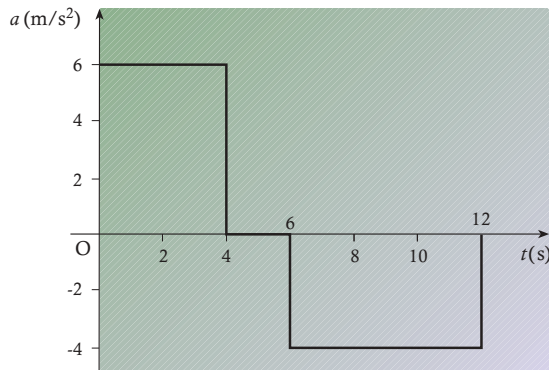


Fig. 5.16 Problema 5.9.

- 5.9** La gráfica $a - t$ de una partícula se muestra en la fig. 5.16. **a)** Determina la velocidad de la partícula para $t = 2, 5, 8$ s. **b)** ¿Qué distancia recorrió en los primeros 10 s? **c)** ¿Qué significado tiene el signo negativo de la aceleración en el intervalo de tiempo entre $t = 6$ y 12 s?
- 5.10** Una partícula, que se mueve con velocidad de 50 m/s, baja su velocidad a cero de manera uniforme en 10 s. ¿Cuál es su aceleración media en ese lapso? ¿Qué significa el signo negativo del resultado?
- 5.11** La figura 5.17 muestra la velocidad de un móvil que parte del reposo. **a)** Dibuja la gráfica de la aceleración en función del tiempo. **b)** ¿Cuál es la aceleración media del móvil durante el tiempo de recorrido? **c)** ¿Cuál es el valor de la aceleración instantánea para $t = 10$ s?

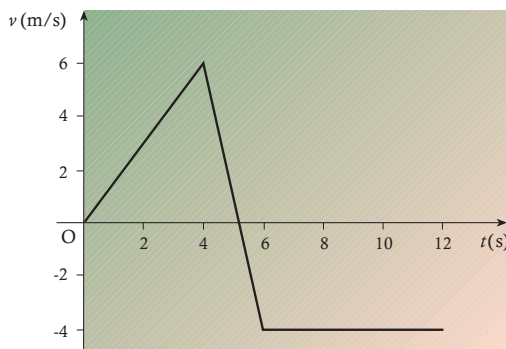


Fig. 5.17 Problema 5.11.

- 5.12** Para el movimiento mostrado en la figura 5.18, **a)** Dibuja la gráfica $a - t$. **b)** Determina la distancia total recorrida para $t = 4$ s y $t = 10$ s. **c)** ¿Cuál es la aceleración cuando $t = 6$ s? **d)** ¿Cuál es la distancia total recorrida por el móvil?

- 5.13** Una partícula se mueve a lo largo de la dirección positiva del eje Y durante 20 s, manteniendo una velocidad constante de 40 m/s. En los próximos 10 s, acelera uniformemente, hasta alcanzar una velocidad de 80 m/s. **a)** ¿Cuál es la aceleración media durante los primeros 20 s y entre $t = 20$ s y $t = 30$ s? **b)** ¿Cuál es el desplazamiento total de la partícula? **c)** ¿Cuál es la velocidad media entre $t = 20$ s y $t = 30$ s?

- 5.14** Un vehículo cambia su velocidad de 0 a 80 km/h en un tiempo de 9 s. **a)** ¿Cuál es su aceleración? **b)** Si mantiene la misma aceleración anterior, ¿cuánto tiempo tarda en cambiar de 80 km/h a 120 km/h?

- 5.15** La velocidad inicial de una partícula es de 8 m/s. Si su aceleración uniforme es de 4 m/s^2 , **a)** ¿Cuál es su velocidad luego de 5 s de recorrido? **b)** ¿Qué distancia recorrió durante ese tiempo?

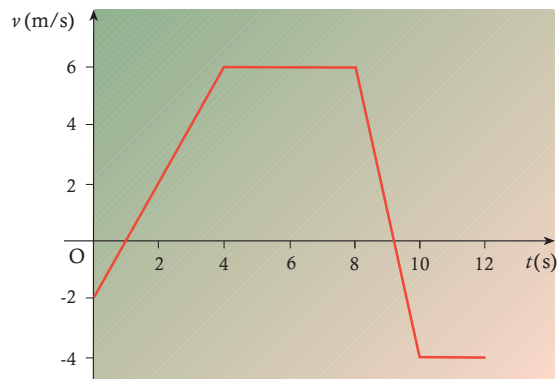


Fig. 5.18 Problema 5.12.

5.16 Se lanza una pelota sobre una superficie pulida con una velocidad inicial de 2 m/s. La pelota se detiene, luego de recorrer 50 m. **a)** ¿Cuánto tarda en detenerse? **b)** Si la aceleración permanece constante, ¿cuál es su valor? **c)** ¿Cuál es el valor de la velocidad cuando la pelota ha recorrido 30 m?

5.17 En una prueba de piques, un auto arranca del reposo y mantiene una aceleración de 12 m/s^2 a lo largo de una distancia de 360 m. **a)** ¿Qué velocidad alcanza a los 360 m? **b)** ¿Qué tiempo tarda en recorrer esa distancia?

5.18 Dos motos de agua parten del reposo de un mismo punto en trayectorias paralelas, con una diferencia de 3 min. Ambas motos pueden alcanzar una velocidad máxima de 60 km/h en una distancia de 30 m. **a)** ¿Cuál es la aceleración de las motos? **b)** ¿Qué distancia las separa, transcurridos 5 min desde que salió la primera?

5.19 María maneja su vehículo por una calle recta, a una velocidad de 60 km/h. Cuando se encuentra a 40 m de una intersección de la calle, sale un camión y se dirige en la misma dirección de su auto a una velocidad de 40 km/h. **a)** ¿Cuánto tarda el auto de María en alcanzar al camión, si ambos vehículos mantienen su velocidad? **b)** Para no chocar, María aplica los frenos y produce una desaceleración de 3 m/s^2 . ¿Se producirá el impacto? **c)** Si no se produce la colisión, ¿qué distancia separa los vehículos al detenerse el auto de María?

5.20 Un vehículo, que estaba detenido en un semáforo, comienza a moverse con una aceleración de 2 m/s^2 , una vez que se enciende la luz verde. Luego que alcanza una velocidad de 60 m/s, mantiene esa

velocidad durante 45 s. ¿Qué distancia habrá recorrido desde que cambió la luz a verde en ese tiempo?

5.21 Una partícula que parte del reposo pasa entre dos puntos P y Q, separados entre sí 125 m, en un tiempo de 5 s. Si su aceleración permanece constante y la velocidad en el punto P es de 20 m/s, determina: **a)** La aceleración de la partícula. **b)** La distancia desde el punto de partida y el punto Q. **c)** La velocidad en el punto Q.

5.22 Un móvil posee una velocidad de 75 km/h. Al aplicar los frenos su velocidad disminuye a 30 km/h en un tiempo de 10 s. Calcula: **a)** Su aceleración. **b)** La distancia recorrida en ese tiempo. **c)** El tiempo que tarda en detenerse.

5.6 MOVIMIENTO DE LOS CUERPOS QUE CAEN LIBREMENTE

En la vida cotidiana, constatamos que aquellos cuerpos que pesan más, caen más rápido que los que pesan menos. Por ejemplo, si dejamos caer de nuestras manos, simultáneamente y separados, un vaso de vidrio y una hoja de papel, vemos, sin ningún género de duda, que el vaso llega más rápido al piso que la hoja de papel. Este hecho nos parece tan obvio y nos convence de tal manera que, sin más razón, generalizamos y decimos que de los cuerpos que caen en el espacio, aquellos que son más pesados caen con más rapidez que los menos pesados.

Este concepto, por lo demás incorrecto, como se demostrará luego, fue establecido como un paradigma científico en el siglo III A.C. por el filósofo griego Aristóteles y perduró por, aproximadamente, dos mil años. Fue el físico italiano G. Galileo quien, después de muchos experimentos, demostró que los cuerpos que caen libremente se mueven con una aceleración constante e idéntica, sin tomar en cuenta su tamaño y peso. *El concepto de caída libre envuelve a cuerpos que caen libremente, despreciando la resistencia del aire.* Entonces, si no se toma en cuenta dicha resistencia

y lanzamos simultáneamente desde un edificio de 100 m de altura una pluma de ave y un pedazo de hierro de 100 kg de masa, ambos llegarán al suelo con la misma aceleración y en el mismo tiempo.

Aun cuando las demostraciones de Galileo fueron contundentes, él mismo no supo explicar por qué las aceleraciones de los cuerpos que caen son iguales, cualesquiera que sean sus tamaños y masas respectivas. Sólo con el advenimiento de la Dinámica y mediante la segunda ley de Newton, pudo explicarse, en forma sencilla, el fenómeno de la aceleración constante de los cuerpos que caen libremente. El estudio de la Dinámica se hará posteriormente en este curso y será allí cuando se dé la explicación sobre este particular.



Un objeto que cae libremente lo hace con la misma aceleración, independientemente si el mismo fue lanzado con una velocidad inicial o bien si fue dejado caer desde el reposo.

La aceleración de los cuerpos que caen libremente se denomina *aceleración debido a la gravedad* o simplemente *aceleración de la gravedad*, y la misma se denota con el símbolo g . Esta aceleración, como hemos estudiado anteriormente, es constante y la misma tiene el valor aproximado de $9,80 \text{ m/s}^2$. Este valor es el utilizado universalmente por la Física para los cálculos en los problemas sobre caída libre de los cuerpos u objetos. La aceleración de la gravedad es, por supuesto, un vector. Se conviene en Física, asignar como dirección positiva de la aceleración g al eje de las Y, hacia arriba, y como dirección negativa al eje de las Y, hacia abajo. En este último caso, la aceleración será $-g$. Como la acción de g apunta siempre hacia abajo, hacia el centro de la Tierra, el resultado de su acción es aumentar la rapidez o velocidad de los objetos que caen en la razón de $9,80 \text{ m/s}$ en cada segundo e, igualmente, disminuir la rapidez o velocidad con la misma razón de $9,80 \text{ m/s}$ en cada segundo, de los objetos que ascienden.

Si suponemos que no existe la resistencia del aire, podemos legítimamente considerar que el movimiento de un cuerpo que cae libremente es equivalente a un movimiento rectilíneo uniforme-

mente acelerado. Por lo tanto, para la solución de problemas relativos a la caída libre de los objetos, podemos aplicar las ecuaciones deducidas para el movimiento uniformemente acelerado, en las cuales debemos sustituir la a por la aceleración de gravedad, g , en las correspondientes ecuaciones. Asimismo, en lugar de la variable x , usaremos la variable y para designar la posición de una partícula. Así, las ecuaciones que se usarán tienen las siguientes expresiones:

$$v = v_o \pm gt \quad (5.21) \quad v_m = \frac{v_o \pm v}{2} \quad (5.22)$$

$$y = y_o \pm \frac{1}{2}(v + v_o)t \quad (5.23)$$

$$y = y_o + v_o t \pm \frac{1}{2}gt^2 \quad (5.24)$$

$$v^2 = v_o^2 \pm 2g(y - y_o) \quad (5.25)$$

En estas ecuaciones, el signo negativo se utilizará para movimientos opuestos a la acción de la gravedad (ascendentes), mientras que el signo positivo se usará para movimientos que tienen la misma dirección de la aceleración de gravedad (descendentes). Se usará como valor de g el valor $9,8 \text{ m/s}^2$.

Ejemplo 5.9

Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial $v_o = 30 \text{ m/s}$. **a)** Calcula la velocidad al cabo de 1 s y 2 s. **b)** ¿Cuál es la altura máxima alcanzada por la pelota? **c)** ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar la altura máxima?

Solución

a) Aplicando la ecuación (5.21), se obtienen las velocidades para los tiempos estipulados, como se muestra a continuación:

Velocidad al cabo de 1 segundo:

$$v = v_o - gt = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s} = 20,20 \text{ m/s}$$

Velocidad al cabo de 3 segundos.

$$v = v_o - gt = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 3 \text{ s} = 0,6 \text{ m/s}$$

Observa que, a medida que la pelota asciende, va disminuyendo su velocidad.

b) La pelota alcanza su altura máxima cuando la velocidad ascendente de la misma es igual a cero ($v = 0$). A esta altura máxima la designaremos como y_m . Usando la relación (5.23) con el signo negativo y considerando que la altura de referencia es $y_o = 0$, tendremos:

$$v^2 = v_o^2 - 2g(y - y_o) \Rightarrow 0 = v_o^2 - 2gy_m \Rightarrow y_m = \frac{v_o^2}{2g}$$

Sustituyendo valores:

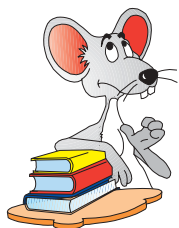
$$y_m = \frac{(30 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2} = 45,92 \text{ m}$$

c) El tiempo que tarda en alcanzar la altura máxima podemos calcularlo usando la relación (5.22) con $y_o = 0$, $y = y_m = 45,92$ y $v_o = 30 \text{ m/s}$:

$$y = y_o + \frac{1}{2}(v + v_o)t \Rightarrow y_m = \frac{1}{2}v_o t$$

$$\Rightarrow t = \frac{2y_m}{v_o} = \frac{2 \cdot 45,92 \text{ m}}{30 \text{ m/s}} = 3,06 \text{ s}$$

Como comentario final, podemos decir que el movimiento de la pelota hacia arriba tiene una aceleración negativa y, como hemos visto en los cálculos de la velocidad en cada uno de los tiempos estipulados, la misma va disminuyendo en $9,80 \text{ m/s}$ cada segundo. Cuando la velocidad es cero, la pelota inicia su caída, lo que ocurre a los $3,06$ segundos. El punto de inicio de la caída de la pelota representa también la altura máxima alcanzada.



PIENSA Y EXPLICA



5.12 ¿Qué es la aceleración de gravedad? ¿Cuál es su valor? ¿Es este valor siempre constante?

5.13 Cuando hablamos de caída libre, ¿qué queremos decir?

5.14 ¿Cuál era el criterio de Aristóteles en relación con la caída libre de los cuerpos?

5.15 ¿Por qué un cuerpo liviano como, por ejemplo, un pedazo de papel, cae más lentamente que un pedazo de hierro, al dejarlos libre desde una cierta altura?

5.16 Se lanza una piedra hacia arriba. Cuando alcanza su altura máxima, ¿cuáles son los valores de su velocidad y su aceleración?

5.17 Se deja caer una pelota desde un edificio de 20 m de altura. Si se desprecia la resistencia del aire, ¿cuánto aumenta la velocidad cada segundo a medida que la pelota cae?

5.18 Si se lanza un objeto hacia arriba con una velocidad inicial v_o , ¿cuál es la velocidad del objeto al chocar con la superficie terrestre?

5.19 ¿Cuál es la expresión de la aceleración de gravedad como un vector?

5.20 ¿Es la aceleración de gravedad sólo válida para objetos que se encuentran cercanos a la superficie terrestre? ¿Existe aceleración de gravedad en otros cuerpos celestes?

- 5.21** ¿Como se comparan los tiempos de subida y bajada para objetos lanzados verticalmente hacia arriba? Justifica tu respuesta.



PROBLEMAS



- 5.23** Se deja caer un objeto desde un edificio de 90 m de altura. **a)** Determina la distancia recorrida al transcurrir 2 y 4 s. **b)** ¿Cuánto tardará el objeto en alcanzar la base del edificio? **c)** ¿Cuál es su velocidad transcurridos 2 y 4 s?

- 5.24** Se lanza una pelota verticalmente hacia arriba con una velocidad de 40 m/s. **a)** ¿Qué tiempo tarda en llegar hasta su altura máxima? **b)** ¿Cuál es la altura máxima alcanzada? **c)** ¿Cuál es su velocidad cuando se encuentra a una altura de 45 m del suelo? **d)** ¿Cuál es su velocidad cuando ha recorrido 100 m?

- 5.25** Una piedra es lanzada verticalmente hacia abajo desde un altura de 35 m con una velocidad de 10 m/s. ¿Qué tiempo tarda en llegar al suelo?

- 5.26** Una persona se encuentra en un apartamento, el cual está a 6 m del nivel más bajo. Desde el piso, un amigo le lanza un manojo de llaves que la persona atrapa 0,8 s más tarde. **a)** ¿Con qué velocidad inicial fueron lanzadas las llaves? **b)** ¿Qué velocidad tenían las llaves al ser atrapadas? **c)** Si la persona no hubiera atrapado las llaves en su camino hacia arriba y espera a que éstas regresen, luego de subir hasta su punto más alto, ¿cuánto tendría que esperar para intentar de nuevo atraparlas?

- 5.27** En las fiestas populares de Venezuela son muy comunes los globos, que se lanzan para conmemorar esas festividades. Uno de estos globos sube verticalmente a una velocidad constante de 4,2 m/s. Cuando el globo está a una altura de 35 m, suelta un regalo sorpresa para los asistentes a la celebración. **a)** ¿Qué distancia recorre el regalo al caer? **b)** ¿Qué tiempo tarda el regalo en llegar al suelo? **c)** Un hombre de 1,80 m de altura trata de atrapar el regalo. ¿Con qué velocidad llegará hasta sus manos?

- 5.28** Se lanzan dos objetos desde un edificio. El primero se deja caer libremente, mientras que el segundo, lanzado 1 s después que el primero, parte con una velocidad inicial de 20 m/s. Si ambos objetos llegan simultáneamente al piso, ¿cuál es la altura del edificio?

CAPÍTULO 6

Movimiento Parabólico

6.1 MOVIMIENTO PARABÓLICO

Se denomina *movimiento parabólico* al movimiento de las partículas o cuerpos en el espacio, cuya trayectoria tiene la forma de una parábola. Estos movimientos son realmente comunes. Se pueden mencionar, entre los más familiares: el movimiento de una pelota de beisbol al salir disparada con cierto ángulo respecto del suelo, por la acción del golpe con el bate, ejecutado por un jugador; el movimiento de una pelota de fútbol al ser disparada, igualmente, con cierto ángulo respecto al suelo, por el portero en un campo de juego. Similarmente, los proyectiles aire - tierra o tierra - aire, constituyen ejemplos de movimientos parabólicos.

Con el objeto de simplificar el estudio del movimiento parabólico, el mismo se realiza considerándolo como un movimiento que se lleva a cabo en un espacio de dos dimensiones; es decir, en un plano. El hecho de que esto se pueda hacer así, está basado en el principio establecido por Galileo, según el cual, *todo movimiento de una partícula que se realiza en el espacio, es decir, en tres dimensiones, puede ser concebido como la resultante de componer las tres componentes unidimensionales en que se puede descomponer el movimiento, con la característica importante que cada una de estos movimientos unidimensionales son simultáneos e independientes, es decir ninguno tiene influencia sobre otro, cada uno actúa como si no existiera otro componente del movimiento.*

Al movimiento parabólico también se le denomina *movimiento de proyectiles*. Este movimiento fue estudiado a profundidad por Galileo Galilei, quien logró describir con exactitud el mismo. Galileo



descubrió que, si se desprecia la resistencia del aire, el movimiento de un proyectil, disparado a cualquier ángulo, es un movimiento compuesto por dos movimientos simultáneos e independientes uno del otro: un movimiento horizontal, con velocidad constante y un movimiento vertical, con aceleración constante. Esta aceleración corresponde a la aceleración de la gravedad.

La fig. 6.1 muestra una pelota que baja desde un plano inclinado; luego, sobre una tabla horizontal y, al final, cae libremente con un movimiento parabólico. Como se puede ver, a medida que desciende por el plano inclinado, la pelota aumenta su velocidad, lo que hace que tomas sucesivas de su

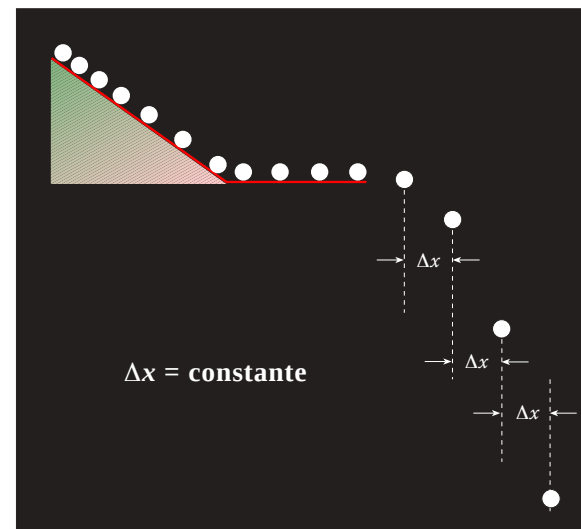


Fig. 6.1 Cuando la pelota abandona la tabla su movimiento es parabólico y la misma se traslada con velocidad constante, según el eje horizontal y aceleración constante (g) en el eje vertical.

movimiento, establezcan distanciamientos más grandes entre una posición y otra, a medida que la misma cae. Este aumento de velocidad es debido a la fuerza gravitatoria que ejerce la Tierra sobre la pelota. Cuando la pelota rueda por la tabla horizontal, la fuerza de la gravedad es compensada por la fuerza normal que ejerce la tabla sobre la pelota y ésta se mueve horizontalmente sin fuerza que la impulse, *lo que hace que la aceleración en la dirección horizontal sea nula y que, por tanto, el movimiento sea uniforme*. Es decir, la pelota recorre distancias iguales en tiempos iguales, tal como se representa en la fig. 6.1. Una vez que la pelota abandona la tabla horizontal, se mueve únicamente por efecto de la fuerza gravitatoria. El movimiento en la dirección horizontal corresponde a un desplazamiento con velocidad uniforme, donde la distancia recorrida Δx , es la misma para iguales intervalos de tiempo. El movimiento en el eje vertical se corresponde con un descenso de la pelota bajo la acción de la fuerza de gravedad, con una aceleración dada por g . De allí que la separación de las posiciones de la pelota aumente con el tiempo. Hay, entonces, en la parte final de la trayectoria, una combinación de movimientos uniforme y acelerado.

La fig. 6.2 es una muestra fotográfica del movimiento de dos pelotas de golf, una de las cuales

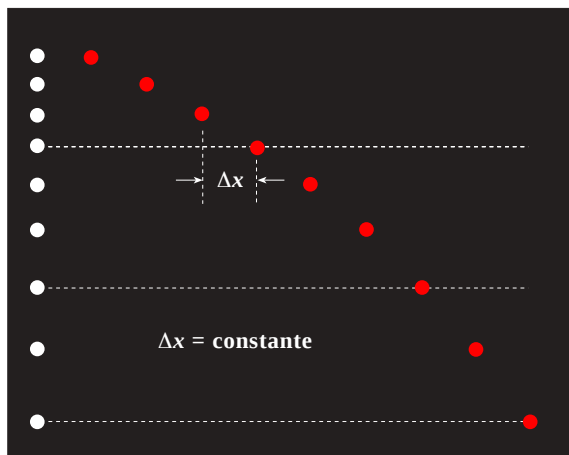


Fig. 6.2 Fotografía estroboscópica de dos pelotas soltadas simultáneamente. Una de ellas se deja caer sin velocidad inicial, mientras que la otra se lanza horizontalmente con una velocidad inicial. Ambas llegan al mismo tiempo al suelo, ya que los movimientos verticales son idénticos. La pelota lanzada se mueve, además, horizontalmente con velocidad constante y de manera totalmente independiente del movimiento vertical.

se dejó caer y la otra fue simultáneamente lanzada en forma horizontal con cierta velocidad inicial. Si observamos cuidadosamente la figura, podemos ver que la posición vertical de la pelota lanzada es idéntica a la posición de la pelota que se dejó caer. Esto nos indica que ambas pelotas tienen el mismo desplazamiento vertical. Podemos notar, además, la acción de la aceleración de la gravedad en ambas pelotas, pues la separación de las imágenes se va haciendo cada vez mayor. También podemos observar que la pelota lanzada tiene desplazamientos iguales en la línea horizontal en cada destello sucesivo; es decir, el movimiento horizontal tiene velocidad constante, lo cual concuerda con lo descubierto por Galileo en el movimiento de un proyectil. En este caso, la pelota lanzada tiene un movimiento horizontal con velocidad constante, independiente de la caída vertical. Puesto que las dos pelotas llegan al mismo tiempo al suelo, se concluye claramente que el movimiento horizontal no tiene influencia alguna en el movimiento vertical de la pelota lanzada. Esto muestra que *la pelota lanzada tiene simultáneamente dos movimientos totalmente independientes*.

El hecho de existir dos movimientos independientes nos permite, utilizando las ecuaciones de la cinemática, resolver en forma sencilla los problemas del movimiento de las partículas o cuerpos lanzados. Es importante resaltar que en las relaciones deducidas a continuación se considera que el aire no opone resistencia al movimiento de los cuerpos.

6.2 LANZAMIENTO HORIZONTAL

En la fig. 6.3 se muestra un diagrama esquemático del movimiento de un proyectil lanzado horizontalmente con una velocidad inicial v_0 . En este caso, no hay ninguna componente vertical de la velocidad inicial.

Al instante de iniciarse el movimiento, comienza a actuar la aceleración de la gravedad, creando con esto una componente de velocidad vertical con dirección hacia abajo.

La componente horizontal de la velocidad del movimiento no tiene aceleración. Es, por lo tanto,

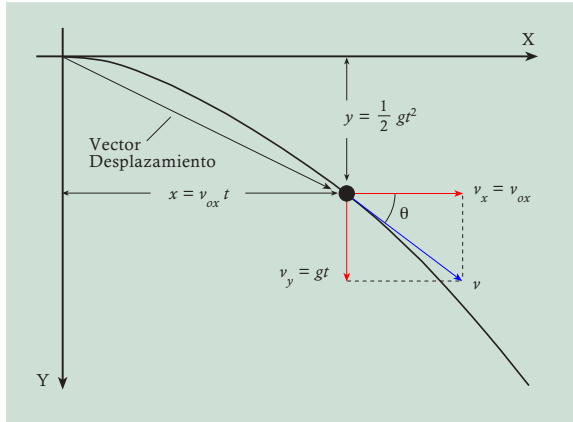


Fig. 6.3 Trayectoria de un proyectil lanzado horizontalmente. El origen de coordenadas se ubica en el punto del lanzamiento. El proyectil inicia su movimiento con una velocidad inicial v_o y avanza con velocidad constante en el eje horizontal y con aceleración igual a g en el eje vertical.

constante y su descripción queda determinada por la ecuación:

$$v_x = v_{ox} = \frac{x}{t} \quad (6.1)$$

Como el movimiento horizontal es uniforme, el proyectil se desplazará en esta dirección una distancia dada por:

$$x = v_{ox} t \quad (6.2)$$

La componente vertical de la velocidad, generada al iniciarse el movimiento por la acción de la gravedad, así como la altura alcanzada, vienen expresadas por las ecuaciones del movimiento en caída libre:

$$v_y = v_{oy} + gt \quad y = y_o + v_{oy} t + \frac{1}{2} gt^2$$

Como el origen del sistema de coordenadas coincide con el punto de disparo del proyectil, $y_o = 0$, además, dado que el proyectil no tiene componente de la velocidad en el eje vertical, $v_{oy} = 0$, las relaciones anteriores se reducen, para el lanzamiento de un proyectil con velocidad horizontal a:

$$v_y = gt \quad (6.3)$$

$$y = \frac{1}{2} gt^2 \quad (6.4)$$

El módulo del desplazamiento del proyectil, en cualquier intervalo de tiempo, d , de acuerdo con la figura 6.3, será:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(v_{ox} t)^2 + \left(\frac{1}{2} gt^2\right)^2} \quad (6.5)$$

La velocidad del proyectil en cualquier punto de su trayectoria es una velocidad instantánea y es tangente a esa trayectoria. La misma es la suma vectorial de las componentes perpendiculares $\vec{v}_x$ y $\vec{v}_y$; es decir:

$$\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$$

El módulo de la velocidad será:

$$|\vec{v}| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{\left(\frac{x}{t}\right)^2 + (gt)^2} \quad (6.6)$$

La dirección del vector velocidad en cualquier punto de la trayectoria puede ser determinada calculando la tangente en el punto considerado. De la fig. 6.3, tenemos:

$$\tan \theta = \frac{v_y}{v_x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} \quad (6.7)$$

Ejemplo 6.1

Desde un avión en vuelo horizontal se deja caer un bulto con medicinas para un pueblo aislado por las lluvias. La velocidad horizontal del avión es constante e igual a 250 m/s. El bulto tarda 7 segundos en llegar al suelo. Calcula: **a)** La altura del avión en el momento de soltar el bulto. **b)** La distancia horizontal alcanzada por el bulto al tocar tierra. **c)** El desplazamiento total del bulto. **d)** El módulo de la velocidad del bulto al tocar el suelo.

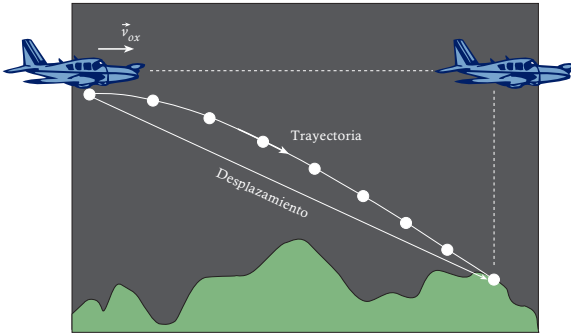


Fig. 6.4 Ejemplo 6.1. Desde el avión, que vuela a una velocidad constante, se deja caer un bulto de medicinas. La trayectoria de caída del bulto se verá desde la Tierra como una parábola y desde el avión como una línea recta, de acuerdo con lo estudiado anteriormente sobre el marco de referencia.

e) La dirección de la velocidad del bulto cuando toca tierra. Ignora la resistencia del aire.

Solución

Tomaremos como marco de referencia el punto donde el avión soltó el bulto. La fig. 6.4 muestra gráficamente los detalles del problema.

a) Para calcular la altura del avión al momento de dejar caer el bulto, usamos la relación (6.4) con $g = 9,8 \text{ m/s}^2$:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}(9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2})(7 \text{ s})^2 = 240,10 \text{ m}$$

b) Utilizamos la relación (6.2) para determinar la distancia horizontal alcanzada por el bulto al tocar tierra:

$$x = v_{ox}t = 250 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 7 \text{ s} = 1.750 \text{ m}$$

c) El desplazamiento total del bulto se obtiene mediante la relación (6.5):

$$d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(240,10)^2 + (1.750)^2} = 1.766,39 \text{ m}$$

d) Conocido el valor de v_x , calculamos el valor de v_y y aplicamos la relación (6.6) para determinar la magnitud de la velocidad del bulto al chocar contra el suelo:

$$v_y = gt = 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 7 \text{ s} = 68,6 \text{ m/s}$$

$$v = \sqrt{(250)^2 + (68,6)^2} = \sqrt{67.205,96} = 259,24 \text{ m/s}$$

e) La dirección de la velocidad del bulto, cuando toca tierra, la calculamos usando (6.7):

$$\theta = \tan^{-1} \frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1} \frac{68,6}{250} = \tan^{-1}(0,2744) = 15,34^\circ$$

Como podemos ver del ejemplo anterior, el avión le comunica su propia velocidad horizontal al bulto, al dejarlo caer libremente. La velocidad horizontal del bulto de 250 m/s es la que produce el alcance o distancia horizontal de llegada a tierra, calculado en 1.750 m , desde el punto donde fue soltado. Mientras mayor sea la velocidad horizontal de un avión que suelta un objeto o el disparo de un proyectil en forma horizontal, mayor será el alcance horizontal de llegada a tierra; pero, cualquiera que sea la velocidad horizontal, el objeto tomará el mismo tiempo si es lanzado o, simplemente, dejado caer verticalmente, sin ninguna velocidad horizontal. El desplazamiento, como se puede ver en la figura 6.4, es la hipotenusa del triángulo rectángulo formado por los catetos x - y calculados, lo cual está de acuerdo con el concepto de desplazamiento físico de los objetos, explicado en capítulos anteriores. Todos los resultados son razonables y concordantes con hechos posibles de la vida real. El ángulo de la dirección de la velocidad del bulto, al tocar tierra, se mide siempre entre la componente horizontal y la hipotenusa del triángulo rectángulo de la figura 6.4.

6.3 LANZAMIENTO INCLINADO DE PROYECTILES

El movimiento de un proyectil disparado con un ángulo sobre la horizontal, con una velocidad inicial $\vec{v}_0$, es un caso general del movimiento de proyectiles disparados horizontalmente. La velocidad inicial podemos manejarla en sus componentes rectangulares, según un sistema de ejes coordenados: v_x y v_y . La acción simultánea de estas dos velocidades producen un movimiento que, proyectado sobre un plano vertical, genera una trayectoria parabólica,

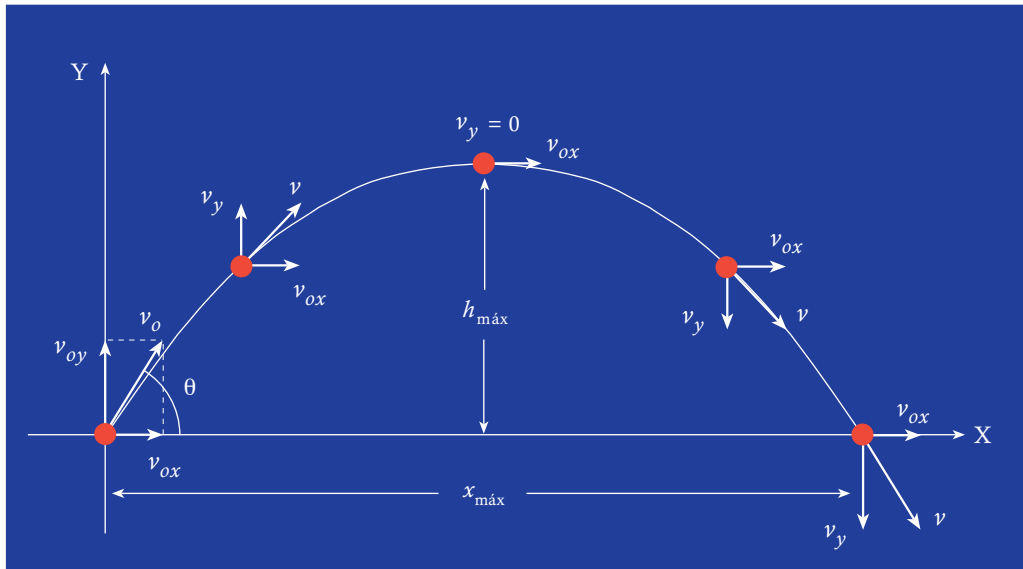


Fig. 6.5 Trayectoria parabólica, en ausencia de aire, de un proyectil disparado con una velocidad inicial v_o . Observa que el vector velocidad, v , cambia con el tiempo, tanto en su módulo como en su ángulo. Asimismo, la componente vertical, v_y , varía en módulo y dirección, a medida que el proyectil avanza. La componente horizontal de la velocidad v_{ox} , permanece constante con el tiempo, debido a la ausencia de aceleración en esa dirección.

como se muestra en la fig. 6.5.

La componente horizontal de la velocidad, como sabemos por lo estudiado anteriormente, es constante, ya que no existe aceleración en esta dirección y la componente vertical es una velocidad que varía uniformemente, debido a la acción de la aceleración, g , de la gravedad.

El vector velocidad $\vec{v}$ del proyectil cambia con el tiempo tanto en magnitud como en dirección. La componente horizontal v_x es constante, pero la componente vertical v_y , va disminuyendo, desde su inicio, por la acción de la aceleración de la gravedad, hasta que se anula en el punto más alto de la trayectoria del movimiento. A partir de allí, cambia su sentido y comienza a aumentar uniformemente por la acción de la aceleración de la gravedad.

Observa que en el punto más alto de la trayectoria, la componente v_y es cero. Por lo tanto, la velocidad $\vec{v}$ es igual a la componente horizontal v_x . En cualquier otro punto, la magnitud de la velocidad será mayor que v_x , puesto que la hipotenusa de un triángulo rectángulo siempre es mayor que cualquiera de sus lados.

Eligimos un marco de referencia, de tal manera que en el sistema de coordenadas el origen se ubica donde se inicia el lanzamiento. Suponiendo que el proyectil se dispara desde el origen cuando $t = 0$, con una velocidad inicial v_o que forma un ángulo θ con la horizontal, podemos escribir:

$$v_{ox} = v_o \cos \theta \quad v_{oy} = v_o \sin \theta \quad (6.8)$$

Como la aceleración horizontal es cero y la vertical corresponde a la de la gravedad, las velocidades según los ejes X y Y están dadas por:

$$v_x = v_{ox} = v_o \cos \theta = \text{constante} \quad (6.9)$$

$$v_y = v_{oy} - gt = v_o \sin \theta - gt \quad (6.10)$$

Como el desplazamiento horizontal, x , corresponde a un movimiento con velocidad constante, tendremos:

$$x = v_{ox} t = (v_o \cos \theta) t \quad (6.11)$$

El desplazamiento vertical tiene una aceleración constante, g , dirigida hacia abajo y su expresión es similar a la de un objeto que se lanza hacia arriba:

$$y = v_{oy} t - \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow y = v_o \operatorname{sen} \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (6.12)$$

La velocidad del proyectil en cualquier momento será $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$ y su módulo es:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_o \cos \theta)^2 + (v_o \operatorname{sen} \theta - g t)^2} \quad (6.13)$$

Si despejamos t en la ec (6.11) y sustituimos en la ec (6.12), se obtiene:

$$t = \frac{x}{v_o \cos \theta} \quad y = \frac{v_o \operatorname{sen} \theta}{v_o \cos \theta} x - \frac{1}{2} \frac{1}{v_o^2 \cos^2 \theta} x^2$$

$$y = (\tan \theta) x - \left(\frac{1}{2 v_o^2 \cos^2 \theta} \right) x^2 \quad (6.14)$$

Esta ecuación sólo es válida para ángulos comprendidos entre $0 \leq \theta < 90^\circ$. Observa que esta ecuación tiene la forma de la función cuadrática $y = ax - bx^2$, que es la ecuación de una parábola que pasa por el origen. Con esto se demuestra que el movimiento de un proyectil desarrolla una trayectoria en forma de parábola, siempre que se considere que no existe resistencia del aire.

Como normalmente habrá resistencia del aire, la trayectoria no es exactamente una parábola y la distancia horizontal recorrida será algo inferior al indicado por las relaciones deducidas.

La dirección del vector velocidad en cualquier punto de la trayectoria, la cual es siempre tangente a la misma, puede ser determinada en forma similar a como se hizo anteriormente para el disparo horizontal, aplicando la función tangente en el punto considerado. Así, tenemos de la fig. 6.5:

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_o \operatorname{sen} \theta - g t}{v_o \cos \theta} \right) \quad (6.15)$$

6.4 ALTURA MÁXIMA, TIEMPO DE VUELO Y ALCANCE DE UN PROYECTIL

La altura máxima, $h_{\max}$, corresponde al mayor desplazamiento vertical que un proyectil alcanza en su trayectoria. Esta altura se alcanza en el instante cuando la componente vertical de la velocidad se hace igual a cero, tal como lo muestra la fig. 6.6.

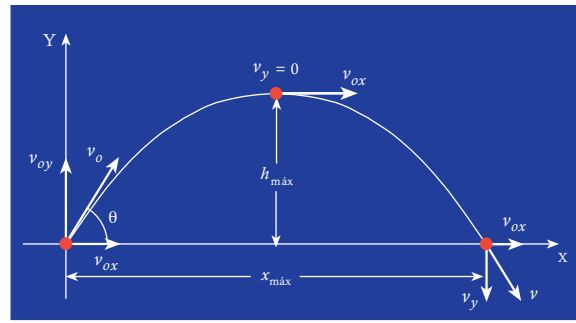


Fig. 6.6 Detalles de la trayectoria parabólica de un proyectil para determinar la altura máxima, el tiempo de vuelo y el alcance.

Haciendo $v_y = 0$ en la relación (6.10), tendremos:

$$t = \frac{v_o \operatorname{sen} \theta}{g} \quad (6.16)$$

Sustituyendo en la relación (6.12), con $y = h_{\max}$:

$$h_{\max} = v_o \operatorname{sen} \theta \frac{v_o \operatorname{sen} \theta}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_o \operatorname{sen} \theta}{g} \right)^2 = \frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g}$$

Finalmente:

$$h_{\max} = \frac{v_o^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{2g} \quad (6.17)$$

El *tiempo de vuelo* del proyectil, t_v , es aquel durante el cual permaneció en su trayectoria hasta terminar su desplazamiento aéreo. Este tiempo es igual al doble del que tarda en alcanzar su altura máxima, ya que en ausencia de resistencia del aire, la trayectoria es simétrica alrededor del punto de altura máxima. Luego:

$$t_v = \frac{2v_o \sin \theta}{g} \quad (6.18)$$

El desplazamiento horizontal del proyectil, cuando vuelve a su altura inicial, se denomina *alcance horizontal*, A_h . Su valor puede obtenerse sustituyendo en la relación (6.11) el valor de t dado por (6.18):

$$A_h = v_o \cos \theta \frac{2v_o \sin \theta}{g}$$

$$\Rightarrow A_h = \frac{2v_o^2 \sin \theta \cos \theta}{g} \quad (6.19)$$

Es usual, mediante el uso de identidades trigonométricas, reducir la expresión anterior, tomando en cuenta que $2\sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$:

$$A_h = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g} \quad (6.20)$$

De la ecuación anterior, podemos observar que el alcance horizontal depende tanto de la velocidad inicial, v_o , como del ángulo de inclinación con el cual se lanza el proyectil. Si suponemos una velocidad inicial constante, el alcance máximo será únicamente función del ángulo de inclinación. Como el valor máximo del seno de un ángulo es igual a 1, el valor mayor de alcance horizontal que se puede lograr con v_o constante se obtiene cuando $2\theta = 90^\circ$, ya que, entonces, $\sin 2\theta = 1$:

$$2\theta = 90^\circ \Rightarrow A_{\text{máx}} = \frac{v_o^2}{g} \quad (6.21)$$

La conclusión es, entonces, que en ausencia de la resistencia del aire, el máximo alcance horizontal de un proyectil se obtiene cuando el ángulo de lanzamiento es de 45° . No siempre el problema se reduce a obtener este alcance máximo. A menudo, lo que se requiere es determinar el ángulo de lanzamiento para obtener un alcance determinado, diferente al alcance máximo. En este caso, basta con despejar el ángulo θ de la relación (6.20). La expresión resultante es:

$$\sin 2\theta = \frac{A_h g}{v_o^2} \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{A_h g}{v_o^2} \right) = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{A_h}{\frac{v_o^2}{g}} \right)$$

$$\theta = \frac{1}{2} \sin^{-1} \left(\frac{A_h}{A_{\text{máx}}} \right) \quad (6.22)$$

La solución de la ecuación anterior arroja 2 soluciones distintas, θ y $180^\circ - \theta$. Cualesquiera de ellas da el ángulo de lanzamiento para determinar el alcance del proyectil.

Ejemplo 6.2

Un jugador de fútbol patea un balón a un ángulo de 30 grados con respecto a la horizontal, con una velocidad inicial de 20 m/s. Calcular: **a)** El tiempo en el que alcanza el punto más alto de su trayectoria. **b)** La altura máxima alcanzada. **c)** El tiempo que permanece en vuelo hasta que toca tierra. **d)** La distancia horizontal que alcanza desde su punto de partida hasta el punto de llegada al suelo. **e)** La velocidad al tocar tierra. **f)** La dirección de la velocidad al llegar al suelo. La resistencia del aire es despreciable.

Solución

El marco de referencia se toma como el punto desde donde el futbolista disparó el balón y este punto es el cero del sistema de coordenadas.

a) El tiempo en el que el balón alcanza el punto más alto de su trayectoria puede ser determinado usando la relación (6.16):

$$t = \frac{v_o \sin \theta}{g} = \frac{(20 \text{ m/s}) \sin 30^\circ}{9,8 \text{ m/s}^2} = 1,02 \text{ s}$$

b) La altura máxima alcanzada por el balón la obtenemos mediante la expresión (6.12) haciendo $t = 1,02 \text{ s}$ o, también, usando la expresión (6.17):

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_o^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{(20 \text{ m/s})^2 \cdot \sin^2 30^\circ}{2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2} = 5,10 \text{ m}$$

c) El tiempo que el balón está en el aire hasta que toca tierra está expresado por (6.18):

$$\frac{2v_o \sin \theta}{g} = \frac{2 \cdot 20 \text{ m/s} \cdot \sin 30^\circ}{9.8 \text{ m/s}^2} = 2,04 \text{ s}$$

Nota que este tiempo es el doble del calculado anteriormente, lo cual está de acuerdo con el hecho de que el tiempo en alcanzar la altura máxima es igual al tiempo de caída libre al suelo desde esa altura máxima.

d) La distancia horizontal que alcanza el balón desde su punto de partida hasta el punto de llegada al suelo (alcance horizontal), se calcula mediante la relación (6.20):

$$t_v = A_h = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{(20 \text{ m/s})^2 \cdot \sin 60^\circ}{9,8 \text{ m/s}^2} = 35,51 \text{ m}$$

e) La velocidad del balón al tocar tierra se obtiene a partir de (6.13):

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{(v_o \cos \theta)^2 + (v_o \sin \theta - gt)^2} = \\ &= \sqrt{(20 \cos 30^\circ)^2 + (20 \sin 30^\circ - 9,8 \cdot 2,04)^2} \\ v &= \sqrt{(20 \cdot 0,87)^2 + (20 \cdot 0,5 - 19,99)^2} = \\ &= \sqrt{302,76 + 99,80} = \sqrt{402,56} = 20,06 \text{ m/s} \end{aligned}$$

f) La dirección de la velocidad que adquiere el balón al llegar al suelo, se obtiene mediante la relación (6.15) con $t = 2,04 \text{ s}$:

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{v_o \sin \theta - gt}{v_o \cos \theta} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{20 \sin 30^\circ - 9,8 \cdot 2,04}{20 \cos 30^\circ} \right) = \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{20 \cdot 0,5 - 9,8 \cdot 2,04}{20 \cdot 0,87} \right) = \\ &= \tan^{-1} \left(\frac{10 - 19,99}{17,40} \right) = \tan^{-1}(-0,57) \Rightarrow \theta = -29,86^\circ \end{aligned}$$

El ángulo negativo significa que la velocidad total del balón, en el instante de tocar el suelo, está en dirección sureste, es decir 30° por debajo del eje X.

Este ángulo, aparte de las aproximaciones, como se puede ver, ha resultado igual al ángulo de disparo del balón, lo cual era de esperarse por la simetría de la parábola en un terreno plano o al mismo nivel de partida y de llegada.

Ejemplo 6.3

Desde un barco artillado se lanza un proyectil hacia una montaña situada a 4 km de distancia del punto de lanzamiento, con una velocidad inicial de 400 m/s y un ángulo de 20° por encima de la horizontal, tal como se muestra en la fig. 6.7. Si se desprecia la resistencia del aire, determina: a) La altura máxima que puede alcanzar el proyectil. b) El tiempo que tarda el proyectil en llegar a la montaña. c) La altura a la cual impactará el proyectil en la montaña. d) La velocidad, $\vec{v}$, del proyectil al producirse el impacto.

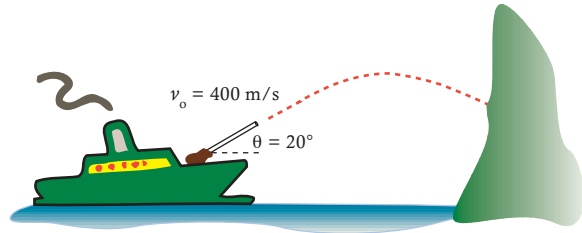


Fig. 6.7 Ejemplo 6.3

Solución

a) Las componentes de la velocidad inicial son:

$$v_{ox} = 400 \cos 20^\circ = 375,88 \text{ m/s}$$

$$v_{oy} = 400 \sin 20^\circ = 136,81 \text{ m/s}$$

La altura máxima que podría alcanzar el proyectil es:

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_o^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{400^2 \sin^2(20^\circ)}{2 \cdot 9,8} = 954,92 \text{ m}$$

b) Como v_{ox} permanece constante, podemos calcular el tiempo que tarda el proyectil en alcanzar los 4.000 m mediante la relación (6.11):

$$t = \frac{x}{v_{ox}} = \frac{4.000 \text{ m}}{375,88 \text{ m/s}} = 10,64 \text{ s}$$

c) La altura alcanzada por el proyectil, al chocar

con la montaña, puede calcularse usando la ecuación (6.12):

$$y = v_o \sin \theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2 = 136,81 \cdot 10,64 - \frac{1}{2} \cdot 9,8 \cdot (10,64)^2 = 1455,66 - 554,73 = 900,93 \text{ m}$$

Observa que el proyectil alcanza a la montaña antes de obtener su altura máxima teórica.

d) Al producirse el impacto, la velocidad horizontal permanece constante en 375,88 m/s. La velocidad vertical está dada por (6.10) con $t = 10,64$ s:

$$v_y = v_{oy} - gt = 136,81 - 9,8 \cdot 10,64 = 32,54 \text{ m/s}$$

Como el proyectil está todavía ascendiendo al alcanzar la montaña, la componente vertical de la velocidad está dirigida hacia arriba. Luego, el vector $\vec{v}$ puede escribirse como:

$$\vec{v} = v_{ox} \vec{i} + v_{oy} \vec{j} = 375,81 \vec{i} + 32,54 \vec{j}$$

El módulo y ángulo de esta velocidad son:

$$v = \sqrt{375,81^2 + 32,54^2} = \sqrt{142.292,01} = 377,22 \text{ m/s}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{32,54}{375,81} = \tan^{-1} 0,09 \Rightarrow \theta = 4,95^\circ$$

Ejemplo 6.4

Desde la azotea de un edificio de 50 m de altura, un muchacho golpea un balón de fútbol con un ángulo de 40° con respecto a la horizontal, tal como se muestra en la fig. 6.8. La velocidad inicial del balón es de 30 m/s. **a)** ¿Qué altura máxima alcanzará el balón? **b)** ¿Qué tiempo tardará en volver a la altura del edificio a medida que desciende? **c)** ¿Qué tiempo tardará en llegar al suelo? **d)** ¿A qué distancia de la base del edificio chocará el balón?

Solución

Dividiremos el lanzamiento en dos movimientos: uno que va desde la azotea (punto O) hasta el punto P, donde la pelota alcanza la altura del edificio, al descender, y otro movimiento desde el punto P hasta el punto Q, donde el balón choca contra el suelo. Las componentes horizontal y vertical de v_o son:

$$v_{ox} = 30 \cos 40^\circ = 22,98 \text{ m/s}$$

$$v_{oy} = 30 \sin 40^\circ = 19,28 \text{ m/s}$$

Movimiento entre los puntos O y P:

a) Altura máxima alcanzada por el balón, relación (6.17):

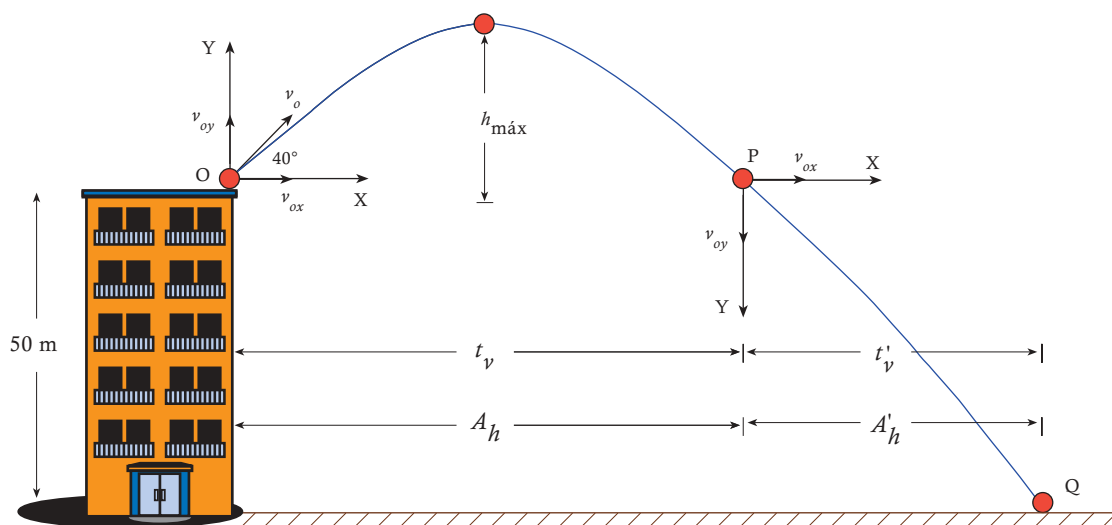


Fig. 6.8 Ejemplo 6.4

$$h_{\text{máx}} = \frac{v_o^2 \sin^2 \theta}{2g} = \frac{(30 \text{ m/s})^2 \sin^2 40^\circ}{2 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2} = 18,83 \text{ m}$$

b) El tiempo de vuelo, en esta etapa del movimiento, es el mismo que tarda el balón en volver a la altura del edificio. Según la relación (6.18):

$$t_v = \frac{2v_o \sin \theta}{g} = \frac{2 \cdot 30 \text{ m/s} \cdot \sin 40^\circ}{9,8 \text{ m/s}^2} = 3,92 \text{ s}$$

Durante ese tiempo, el alcance horizontal es:

$$A_h = \frac{v_o^2 \sin 2\theta}{g} = \frac{(30 \text{ m/s})^2 \cdot \sin 80^\circ}{9,8 \text{ m/s}^2} = 90 \text{ m}$$

Movimiento entre los puntos P y Q:

Para esta etapa del movimiento y, en ausencia de la resistencia del aire, la velocidad inicial v_o será igual a 30 m/s y el ángulo de la velocidad inicial, con respecto a la horizontal será de 40° , igual al ángulo inicial de lanzamiento.

c) Para calcular el tiempo empleado por el balón para llegar al suelo, hacemos uso de la relación:

$$y = v_{oy} t + \frac{1}{2} g t^2$$

Como $y = 50 \text{ m}$ y $v_{oy} = 19,28 \text{ m/s}$, tendremos:

$$50 = 19,28t + 4,9t^2 \Rightarrow 4,9t^2 + 19,28t - 50 = 0$$

La solución de esta ecuación está dada por:

$$t = \frac{-19,28 \pm \sqrt{19,28^2 + 4 \cdot 4,9 \cdot 50}}{2 \cdot 4,9} = \frac{-19,28 \pm \sqrt{1.351,72}}{9,8}$$

$$t = \frac{-19,28 \pm 36,77}{9,8} = \frac{-19,28 + 36,77}{9,8} = \frac{17,49}{9,8} = 1,78 \text{ s}$$

Donde se ha tomado el valor positivo para el tiempo t . Es decir, el tiempo de vuelo para esta etapa es de $t'_v = 1,78 \text{ s}$. Luego, el tiempo que tarda el balón en llegar al suelo está dado por:

$$t_{\text{Total}} = t_v + t'_v = 3,92 + 1,78 = 5,70 \text{ s}$$

d) El alcance entre P y Q será, con $t = t'_v = 1,78 \text{ s}$:

$$A'_h = v_{ox} t = 22,98 \cdot 1,78 = 40,90 \text{ m}$$

Entonces, la distancia de la base del edificio y el punto donde la bola choca contra el suelo es:

$$d = 90 + 40,90 \text{ m} = 130,90 \text{ m}$$

Ejemplo 6.5

Un participante de una carrera de motocross debe saltar el obstáculo mostrado en la fig. 6.9. Las alturas de los puntos A y B, separados por una distancia de 7,5 m, son de 5 m y 3,6 m, respecto al nivel de referencia. a) ¿Qué tiempo tarda en llegar desde A hasta B? b) ¿Cuál debe ser la velocidad horizontal mínima para que la moto supere el obstáculo?

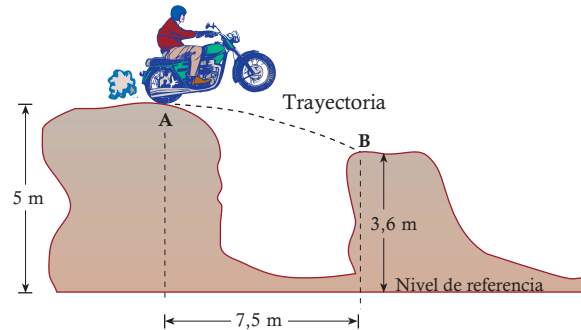


Fig. 6.9 Ejemplo 6.5.

Solución

a) El movimiento de la moto al saltar corresponde a un movimiento parabólico horizontal donde se cumplen las relaciones:

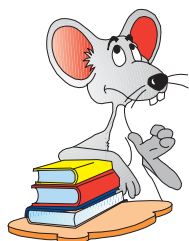
$$v_x = v_o = \frac{x}{t} \quad y = \frac{1}{2} g t^2$$

Despejando t de la segunda ecuación y tomando en cuenta que la diferencia de altura entre A y B es de 1,4 m:

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,4 \text{ m}}{9,8 \text{ m/s}^2}} = \sqrt{0,31 \text{ s}^2} = 0,56 \text{ s}$$

b) Como $v_o = \frac{x}{t} = \text{constante}$ y $x = 7,5 \text{ m}$:

$$v_o = \frac{7,5 \text{ m}}{0,54 \text{ s}} = 13,89 \text{ m/s} \quad (50 \text{ km/h})$$



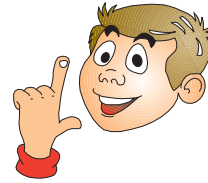
PIENSA Y EXPLICA



- 6.1** ¿Por qué se dice que el movimiento de un proyectil es parabólico?
- 6.2** Explica lo afirmado por Galileo en cuanto a la independencia con la cual puede ser tratado un movimiento complejo, en términos de sus componentes.
- 6.3** Se ha afirmado en este capítulo que el movimiento de proyectiles tiene lugar con velocidad constante en la dirección horizontal y con aceleración constante en la dirección vertical. ¿Por qué esto es así?
- 6.4** ¿Por qué los desplazamientos verticales de las pelotas de la fig. 6.2 son iguales?
- 6.5** Explica cómo la presencia del aire puede afectar el movimiento parabólico de un proyectil.
- 6.6** La velocidad inicial de un proyectil al ser lanzado desde el suelo puede expresarse como $\vec{v} = 8\vec{i} + 14\vec{j}$. ¿Cuál es su velocidad y su aceleración al alcanzar su altura máxima? Expresa vectorialmente su velocidad y aceleración al volver a la altura del suelo.
- 6.7** Si se lanzan proyectiles en la Tierra y en la Luna con el mismo ángulo de inclinación y la misma velocidad inicial, ¿cuál de ellos alcanza mayor altura y mayor desplazamiento horizontal? Explica.
- 6.8** Si se lanza un proyectil con una velocidad inicial y un ángulo respecto al eje Y. ¿Cuál es la aceleración del proyectil? ¿Se puede decir que el movimiento es en caída libre?
- 6.9** ¿Por qué la relación (6.14) es válida sólo para ángulos entre 0° y 90° ?
- 6.10** Define los términos altura máxima, tiempo de vuelo y alcance de un proyectil y deduce las expresiones matemáticas correspondientes a estos términos.
- 6.11** Demuestra que el ángulo de 45° proporciona el mayor alcance de un proyectil para una velocidad inicial constante.
- 6.12** ¿Cómo varían la velocidad y la aceleración de un proyectil, a medida que describe su trayectoria parabólica?



PROBLEMAS



- 6.1** Una metra se desliza a lo largo de una mesa horizontal y cuando abandona el plano de la mesa tiene una velocidad de 5 m/s. Si choca contra el piso 0,5 s después, **a)** ¿Cuál es la altura de la mesa? **b)** ¿A qué distancia de la mesa choca contra el piso. **c)** ¿Cuál es la velocidad al chocar contra el piso?
- 6.2** Desde un edificio de 130 m de altura se lanza horizontalmente una piedra con una velocidad inicial de 50 m/s. **a)** ¿Cuál es el alcance horizontal de la piedra. **b)** ¿Cuál es la distancia vertical recorrida por la piedra, transcurridos 3 s del lanzamiento? **c)** ¿Qué velocidad tiene la piedra, transcurridos 4 s del lanzamiento?
- 6.3** Un proyectil, lanzado horizontalmente desde una colina, con una velocidad inicial de 90 m/s, alcanza a llegar a una distancia horizontal de 320 m del pie de la misma. **a)** ¿Qué altura tiene la colina? **b)** ¿Cuánto tardó en llegar al suelo? **c)** ¿Con qué velocidad choca contra el suelo?
- 6.4** Un bombardero que vuela con velocidad de 300 m/s se encuentra a una altura de 5.000 m. Si deja caer una bomba en ese momento, **a)** ¿Cuánto tardará la bomba en alcanzar el suelo? **b)** ¿Cuál es la expresión vectorial de la velocidad al chocar? ¿Cuál es el módulo de la velocidad en ese momento? **c)** ¿Qué velocidad y qué ángulo tiene la bomba, transcurridos 5 s de haberse dejado caer?

- 6.5** En la fig. 6.10, un esquiador que se mueve horizontalmente a una velocidad constante de 10 m/s, abandona la parte plana y se lanza por una rampa de inclinación 21° . **a)** ¿Qué distancia vertical descendió? **b)** ¿Cuánto tiempo permaneció en el aire? **c)** ¿Cuál es su velocidad al hacer contacto con el suelo **d)** Determina la distancia recorrida por el esquiador sobre la rampa desde que hace contacto con la misma?
- 6.6** Un jugador de fútbol patea un balón con una velocidad inicial de 22 m/s y un ángulo de 48° respecto a la horizontal. **a)** ¿Qué altura máxima alcanzó el balón? **b)** ¿Cuánto tiempo permaneció el balón en el aire? **c)** ¿Cuál es la velocidad del balón al hacer contacto con el suelo? **d)** Determina la distancia recorrida por el balón cuando hace contacto con el suelo.
- 6.7** Se lanza un proyectil y, luego, de 24 s, alcanza el punto más alto de su trayectoria. Si el ángulo de inclinación inicial es de 37° , determina: **a)** La velocidad inicial con la cual fue lanzado. **b)** La altura máxima que alcanza. **c)** El alcance del proyectil.

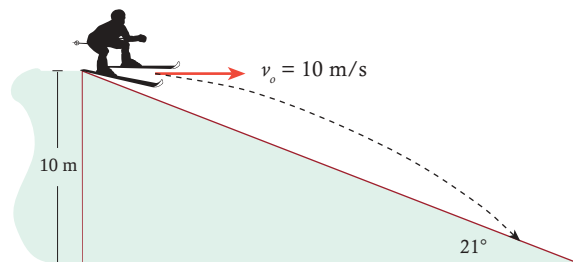


Fig. 6.10 Problema 6.5.

6.8 Un jugador de beisbol batea una pelota, que es lanzada a 130 m. El ángulo inicial es de 34° . **a)** ¿Cuál es la velocidad de la pelota al cabo de 1,5 s? **b)** ¿Qué altura máxima alcanzó? **c)** ¿Cuál fue el tiempo de vuelo? **d)** ¿Qué dirección tiene la pelota al chocar contra el suelo?

6.9 Desde lo alto de un edificio de 80 m de altura se dispara un proyectil con un ángulo de elevación de 37° y velocidad inicial 72 m/s. **a)** ¿Qué altura alcanza? **b)** ¿A qué distancia de la base del edificio cae el proyectil? **c)** ¿Cuál es el tiempo de vuelo?

6.10 Una pelota es lanzada contra una pared con un ángulo de elevación de 30° y $v_o = 35$ m/s. Si la pared se encuentra a 25 m del punto de lanzamiento, determina si la pelota choca contra la pared y, en caso de ser así, ¿a qué altura de la misma se produce el contacto?

6.11 Un barco torpedero dispara un proyectil para tratar de alcanzar la lancha mostrada en la figura 6.11. **a)** ¿Cuál debe ser el ángulo de elevación del cañón para superar la montaña que separa las dos embarcaciones? **b)** ¿Dónde se debe evitar colocar la lancha para no ser alcanzada por el disparo?

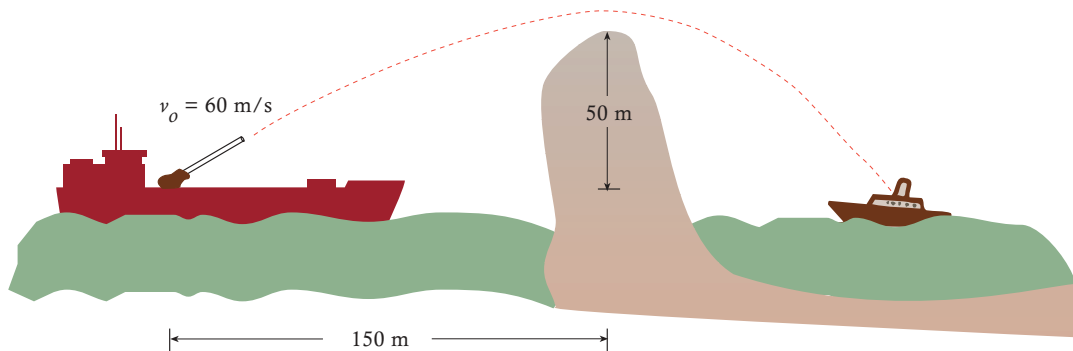
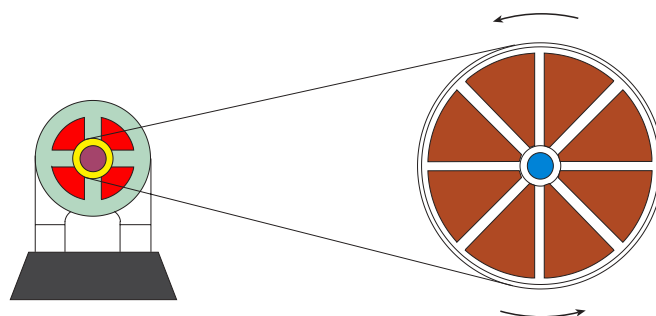


Fig. 6.11 Problema 6.11.

CAPÍTULO 7

Movimiento Circular

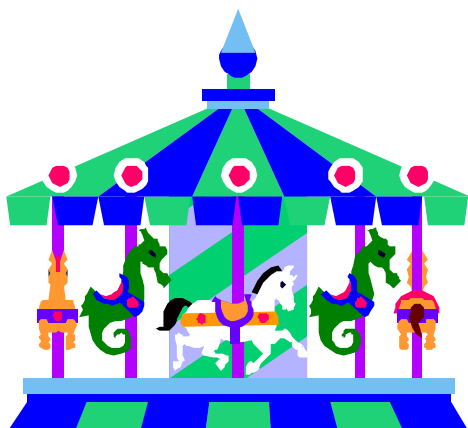


7.1 MOVIMIENTO CIRCULAR

El movimiento circular, como su nombre lo indica, es el movimiento desarrollado por una partícula, cuya trayectoria es una circunferencia. En la vida cotidiana, nos podemos percatar fácilmente de la existencia de este tipo de movimiento: en un velódromo, automóviles deportivos llevan a cabo competencias de velocidad en una pista circular; en los parques de recreación, los niños montan caballitos sobre carrouseles que rotan sobre un eje; en las ruedas de los automóviles, todas sus partículas realizan movimientos circulares, cuando el auto se pone en movimiento. En la naturaleza existen muchos cuerpos o partículas que desarrollan un movimiento circular, o aproximadamente circular, como el movimiento de la Tierra en su revolución alrededor de el Sol, los satélites alrededor de los planetas y, modernamente, los satélites artificiales que

orbitan la Tierra. Si observamos con detenimiento los tipos de movimiento que tienen lugar alrededor nuestro, podríamos afirmar que el movimiento circular es mucho más frecuente que el movimiento rectilíneo.

Los cuerpos que realizan movimiento circular lo hacen, bien alrededor de un eje ubicado dentro de su propio cuerpo y, en este caso, se dice que *el cuerpo rota o gira*, o, bien, el cuerpo se mueve alrededor de un eje situado fuera de él; en este caso, se dice que *el cuerpo realiza una revolución*. La Tierra combina estos dos movimientos: rota o gira sobre su eje imaginario interno y realiza revoluciones alrededor del eje imaginario del centro del Sol. Podemos citar, también, como ejemplo, el de un niño montado en un caballito de un carrousel. El carrousel, por ser un cuerpo rígido que se mueve alrededor de un eje situado en su centro, rota o gira cuando inicia su movimiento; en cambio, el caballito ejecuta revoluciones, ya que se mueve alrededor del eje de rotación del carrousel, que es externo a sí mismo.



El carrousel *rota o gira*, los caballitos ejecutan revoluciones.

7.2 MOVIMIENTO CIRCULAR UNIFORME

Cuando una partícula se mueve en una trayectoria curvilínea, como se muestra en la fig. 7.1, la velocidad de la misma puede ser representada por un vector tangente a dicha trayectoria. La velocidad puede variar tanto por el cambio de la magnitud del vector como por la variación de la dirección del mismo. En ambos casos hay aceleración: una, que causa variación del módulo de la *velocidad tangencial* y otra, que da lugar a variaciones en la dirección del vector velocidad.

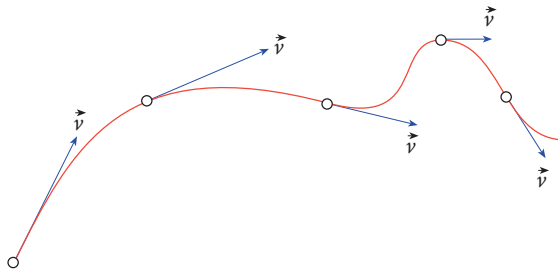


Fig. 7.1 Variación del vector velocidad a lo largo de una trayectoria curvilínea.

El caso, ya estudiado en el capítulo 6, del movimiento parabólico, es un ejemplo típico del movimiento en un plano, en el cual la presencia de la aceleración de gravedad modifica tanto la magnitud de la velocidad como la dirección de la misma. En la fig. 7.2 se muestra la trayectoria parabólica de un proyectil, en la cual el módulo de la velocidad no sólo varía a lo largo de dicha trayectoria, sino que su dirección cambia a medida que el proyectil asciende. Los dos cambios de la velocidad, módulo y dirección, son consecuencia de la aceleración de gravedad. Tal como se indica en la fig. 7.2, la aceleración de gravedad puede ser descompuesta en dos componentes: una perpendicular a la trayectoria, g_n , y otra, tangencial a esa trayectoria, g_t . Esta última componente se opone al cambio de velocidad y es responsable por la disminución del módulo de la misma, a medida que el proyectil asciende. La otra componente, g_n , normal a la trayectoria, es la que causa la constante variación en la dirección de la velocidad.

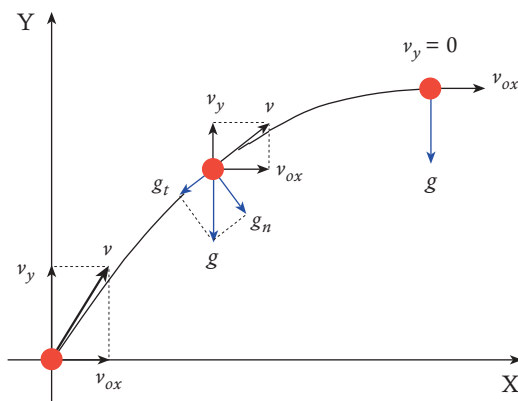


Fig. 7.2 Variación del vector velocidad a lo largo de una trayectoria parabólica debido a la presencia de la aceleración de gravedad.

En un movimiento curvilíneo, la aceleración normal a la trayectoria es la responsable por el cambio de dirección de la velocidad. La aceleración tangente a la trayectoria, causa una disminución del módulo de la velocidad.



Se entiende por *movimiento circular* de una partícula o de un cuerpo rígido, aquel movimiento en el cual la trayectoria corresponde a una circunferencia, tal como se muestra en la fig. 7.3. La partícula rota alrededor del punto O, al cual se le conoce como *eje de rotación*. La posición de la partícula, en cualquier punto de la trayectoria, está completamente determinada por el radio de la circunferencia y el ángulo θ , medido a partir del eje Y de referencia. En el caso presentado en la fig. 7.3, en el cual la partícula se mueve en el sentido de giro de las agujas del reloj y el ángulo se incrementa, a medida que se describe la trayectoria, se habla de un ángulo negativo. En caso contrario, se considera que el ángulo es positivo.

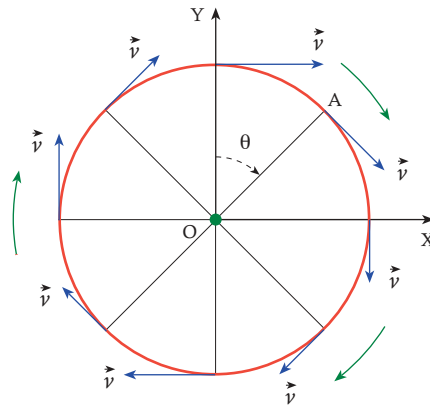


Fig. 7.3 Movimiento circular de una partícula.

El movimiento circular es un caso particular del movimiento curvilíneo y, como tal, da lugar, tanto a una aceleración tangencial que produce cambios en la magnitud de la velocidad tangencial de la partícula, como a una aceleración normal a la trayectoria, la cual da lugar a cambios de la dirección del vector velocidad. Estas aceleraciones reciben el nombre de *aceleración tangencial* y *aceleración centrípeta* o *radial*. Esta última, deriva su nombre por estar dirigida hacia el centro de la trayectoria. Observa que en la fig. 7.3 la longitud del vector velocidad

cambia, a medida que la partícula gira.

Se habla de *movimiento circular uniforme*, cuando una partícula, en su movimiento a lo largo de la circunferencia, recorre ángulos o arcos iguales en tiempos iguales. *En el movimiento circular uniforme, el módulo de la velocidad tangencial permanece constante, mientras que la dirección de la misma varía permanentemente.*

Para el movimiento circular, es conveniente expresar los ángulos en radianes, en lugar de grados. Recordemos que $1 \text{ radián} = 57,3^\circ$ y que $360^\circ = 2\pi$ radianes. La equivalencia de $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$ nos permite establecer otras equivalencias de radianes en los ángulos más frecuentemente utilizados. En la tabla 7.1 se muestran esta equivalencias.

GRADOS	RADIANES
30	$\pi/6$
45	$\pi/4$
57,3	1
60	$\pi/3$
90	$\pi/2$
180	π
360	2π

Tabla 7.1 Equivalencias entre grados y radianes para algunos ángulos.

7.3 RAPIDEZ ANGULAR

En la fig. 7.4 se muestra la trayectoria circular de una partícula que rota alrededor de un eje, el cual pasa por el punto O, perpendicular al plano del papel. Supongamos que cuando $t = t_o$, la partícula se encuentra en el punto A y, posteriormente, en un tiempo cualquiera t , está en el punto B. Los ángulos correspondientes a estos puntos son θ_o y θ , respectivamente.

La *rapidez angular media* se define como el cociente entre el ángulo barrido por el radio de la circunferencia al desplazarnos desde el punto A al punto B y el tiempo empleado para barrer dicho ángulo. De

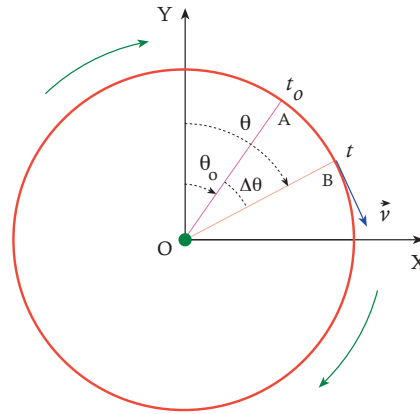


Fig. 7.4 La rapidez angular se define como el cociente entre el desplazamiento angular $\Delta\theta = \theta - \theta_o$ y el tiempo transcurrido $\Delta t = t - t_o$.

acuerdo a la fig. 7.4 la rapidez angular está dada por:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta - \theta_o}{t - t_o} \quad (7.1)$$

Cuando el ángulo θ se expresa en radianes y el tiempo en segundos, la rapidez angular tiene unidades de radianes por segundo (rad/s). Es también usual expresar la velocidad angular en revoluciones por segundo (rps) o revoluciones por minuto (rpm). Para ello, hay que tomar en cuenta que una revolución es equivalente al barrido de un ángulo de 360° o de 2π radianes

Cuando el punto A está muy cercano al punto B, en la fig. 7.4, el tiempo transcurrido en barrer el ángulo $\Delta\theta$ es muy pequeño y se habla de *rapidez angular instantánea*, cuya expresión matemática es:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (7.2)$$

Si la rapidez angular de una partícula es constante, el movimiento circular es uniforme y la rapidez angular instantánea es igual a la rapidez angular media y la relación (7.1) puede escribirse como:

$$\omega = \omega_m = \frac{\theta - \theta_o}{t - t_o} \quad (7.3)$$

De acuerdo a la relación anterior, el valor del ángulo θ , en cualquier instante, lo podemos escribir como:

$$\theta = \theta_o + \omega(t - t_o) \quad (7.4)$$

Si el movimiento circular lo comenzamos a medir cuando $t_o = 0$ y $\theta_o = 0$, la relación anterior se convierte en:

$$\theta = \omega t \quad (7.5)$$

Observa la similitud entre la relación anterior y la ecuación $x = vt$ del movimiento lineal uniforme.

7.4 ACELERACIÓN ANGULAR

Si la rapidez angular de una partícula varía con el tiempo, se dice que dicha partícula posee una *aceleración angular*. Si la rapidez angular en t_o es ω_o y en t es ω , tal como se indica en la fig. 7.5, la aceleración angular media, representada por la letra griega α_m , se define como el cociente de la variación de la rapidez angular y el tiempo transcurrido:

$$\alpha_m = \frac{\omega - \omega_o}{t - t_o} \quad (7.6)$$

Como puede deducirse de la relación anterior, la aceleración angular es la medida de la variación de la velocidad angular cada cierto tiempo. Dado que la velocidad angular se expresa comúnmente en rad/s, la medida de aceleración angular es en rad/s cada segundo. En otras palabras, la aceleración angular se puede medir en rad/s².

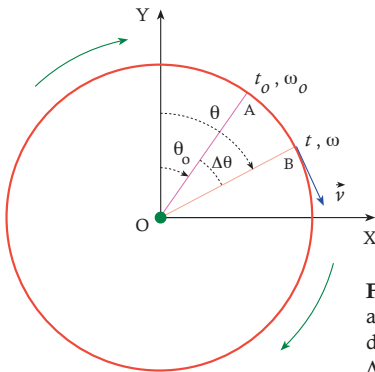


Fig. 7.5 La aceleración angular es el cociente de la rapidez angular $\Delta\omega = \omega - \omega_o$ y el tiempo transcurrido $\Delta t = t - t_o$.

La aceleración angular instantánea se obtiene de forma parecida a como se obtuvo la rapidez angular instantánea. Es decir:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \quad (7.7)$$

Si la aceleración angular es constante, la rapidez angular variará continuamente con el tiempo y la aceleración media e instantánea son iguales. Bajo esta condición podemos escribir la relación (7.6) de la manera siguiente:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t - t_o} \quad (7.8)$$

Si tomamos $t_o = 0$, la expresión para la velocidad angular de una partícula que gira con aceleración constante es, de acuerdo a la relación (7.8):

$$\omega = \omega_o + \alpha t \quad (7.9)$$

Observa la similitud de la ecuación anterior con la expresión que da la velocidad de una partícula, que se desplaza en línea recta con aceleración constante ($v = v_o + at$).

Para deducir una ecuación que indique el ángulo recorrido durante un tiempo determinado, partimos de que la rapidez angular media puede expresarse como:

$$\omega_m = \frac{\omega_o + \omega}{2} \quad (7.10)$$

Combinando la expresión anterior con (7.6):

$$\omega_m = \frac{\omega_o + [\omega_o + \alpha(t - t_o)]}{2} = \omega_o + \frac{1}{2}\alpha(t - t_o) \quad (7.11)$$

Como:

$$\omega_m = \frac{\theta - \theta_o}{t - t_o} \quad (7.12)$$

podemos escribir, igualando (7.11) y (7.12):

$$\begin{aligned}\theta - \theta_o &= [\omega_o + \frac{1}{2}\alpha(t - t_o)](t - t_o) = \\ &= \omega_o(t - t_o) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_o)^2\end{aligned}\quad (7.13)$$

Si asumimos que el ángulo recorrido al comienzo del movimiento es igual a cero ($\theta_o = 0$; $t_o = 0$), la relación anterior se reduce a:

$$\theta = \omega_o t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (7.14)$$

Si se elimina el tiempo en las relaciones (7.9) y (7.14), obtenemos:

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta \quad (7.15)$$

Podemos afirmar que las relaciones (7.14) y (7.15) son similares a las ecuaciones que describen al movimiento rectilíneo uniforme.

Ejemplo 7.1

Un motor que rota a 1.200 rpm aumenta su rapidez de manera uniforme, hasta alcanzar 1.800 rpm en 2 s. **a)** ¿Cuál es la aceleración angular del motor? **b)** Determina el número de revoluciones que da el motor durante ese tiempo.

Solución

a) Como 1 revolución es equivalente a 2π radianes y $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$, podemos escribir:

$$1 \text{ rpm} = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{min}} = \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}} = \frac{\pi}{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Los valores de la rapidez del motor pueden expresarse como:

$$\omega_o = 1.200 \text{ rpm} = 1.200 \cdot \frac{\pi}{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 40\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\omega = 1.800 \text{ rpm} = 1.800 \cdot \frac{\pi}{30} \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 60\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

La aceleración angular la calculamos utilizando la

relación (7.6) con $t_o = 0$:

$$\alpha = \frac{\omega - \omega_o}{t} = \frac{60\pi \text{ rad/s} - 40\pi \text{ rad/s}}{2 \text{ s}} = 10\pi \text{ rad/s}^2$$

b) Para determinar el número de revoluciones, obtenemos el ángulo barrido, mediante la relación (7.14):

$$\begin{aligned}\theta &= 40\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 2 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 10\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 4 \text{ s}^2 = \\ &= (80\pi + 20\pi) \text{ rad} = 100\pi \text{ rad}\end{aligned}$$

Como cada revolución es equivalente a 2π radianes, se tiene:

$$\text{Número de revoluciones} = n = \frac{100\pi}{2\pi} = 50$$

Ejemplo 7.2

Un disco que gira con una rapidez angular de 360 rpm, acelera hasta alcanzar 4 rad/s^2 . ¿Cuántas vueltas debe dar para alcanzar una rapidez de 1.560 rpm? ¿Qué tiempo empleó en alcanzar esta rapidez?

Solución

Se tiene la siguiente información:

$$\alpha = 4 \text{ rad/s}^2 \quad \omega_o = \frac{360 \cdot 2\pi}{60} \text{ rad/s} = 12\pi \text{ rad/s}$$

$$\omega = 1.560 \text{ rpm} = \frac{1.560 \cdot 2\pi}{60} \text{ rad/s} = 52\pi \text{ rad/s}$$

De la relación (7.15):

$$\omega^2 = \omega_o^2 + 2\alpha\theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{\omega^2 - \omega_o^2}{2\alpha}$$

Sustituyendo valores:

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{(52\pi)^2 - (12\pi)^2}{2 \cdot 4} \frac{\text{rad}^2/\text{s}^2}{\text{rad/s}^2} = \frac{2.704\pi^2 - 144\pi^2}{8} = \\ &= \frac{2.560\pi^2}{8} = 320\pi^2 \text{ rad}\end{aligned}$$

Para encontrar el número de revoluciones, dividimos el resultado anterior por 2π :

$$n = \frac{320\pi^2}{2\pi} = 160\pi \text{ revoluciones}$$

Para determinar el tiempo empleado en alcanzar 1.560 rpm, usamos (7.9):

$$t = \frac{\omega - \omega_o}{\alpha} = \frac{52\pi - 12\pi}{4} \frac{\text{rad/s}}{\text{rad/s}^2} = \frac{40\pi}{4} \text{ s} = 10\pi \text{ s}$$

7.5 VELOCIDAD ANGULAR

Toda partícula o un cuerpo rígido animado de un movimiento circular uniforme posee, simultáneamente, dos tipos de velocidad: la *velocidad angular* y la *velocidad lineal* o *velocidad tangencial*. Ambas velocidades son cantidades vectoriales. Como vector, la velocidad angular debe poseer un módulo y una dirección. Basado en esto, la representación de la velocidad angular puede escribirse como:

$$\vec{\omega} = (\omega, \phi) \quad (7.16)$$

Donde ω es la magnitud de la velocidad angular y ϕ es el ángulo que indica la dirección. Aun cuando es relativamente fácil imaginarse la velocidad lineal como un vector, no sucede así con la velocidad angular, cuyo módulo corresponde a la rapidez angular estudiada en la sección 7.3. Para determinar la dirección del vector velocidad angular, imaginamos un disco rotando alrededor de un eje perpendicular al plano del disco, tal como se muestra en la fig. 7.6. En un primer caso, fig. 7.6a, el disco rota en el sentido de las agujas del reloj, y el vector velocidad angular, $\vec{\omega}$, tiene la dirección mostrada. En el segundo caso, fig. 7.6b, el disco gira en sentido contrario al de las agujas del reloj y la dirección de $\vec{\omega}$ es opuesta a la del caso anterior.

Una regla práctica para determinar la dirección del vector velocidad angular nos la da el movimiento de un tornillo de rosca derecha al girar, tal como se muestra en la fig. 7.6. En ambos casos, al girar el tornillo en uno u otro sentido, el movimiento de avance o de retroceso, nos da la dirección del vector velocidad angular.

7.6 VELOCIDAD TANGENCIAL

Considera la rueda dentada de la fig. 7.7. Cualquier punto situado a una distancia radial r_2 , tendrá una velocidad tangencial mayor que uno situado a una distancia radial r_1 del eje de rotación. Aun cuando

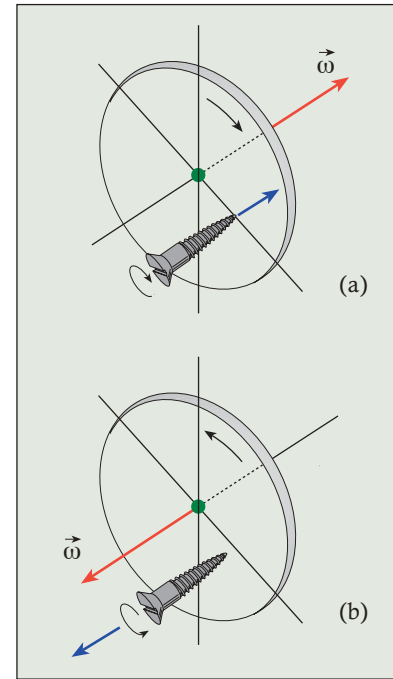


Fig. 7.6 El vector velocidad angular es paralelo al eje del disco, perpendicular al plano del mismo, y su dirección depende del sentido de rotación del disco.

la velocidad angular es la misma para ambos puntos, la *velocidad tangencial depende de la distancia al eje de rotación*.

Consideremos el movimiento circular de una partícula alrededor de un eje de rotación O, tal como se indica en la fig. 7.8. El radio de la circunferencia es r y la partícula se mueve desde el punto A hasta el punto B. En ese movimiento, s es la distancia recorrida por la partícula a lo largo de la circunferencia y $\vec{d}$ es el vector desplazamiento desde A hasta B. El vector correspondiente a la velocidad tangencial es $\vec{v}_T$.

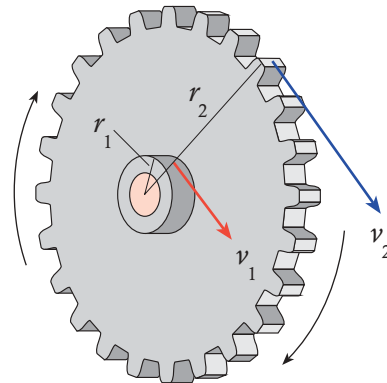


Fig. 7.7 La velocidad tangencial depende de la distancia al eje de rotación. $v_2 > v_1$.

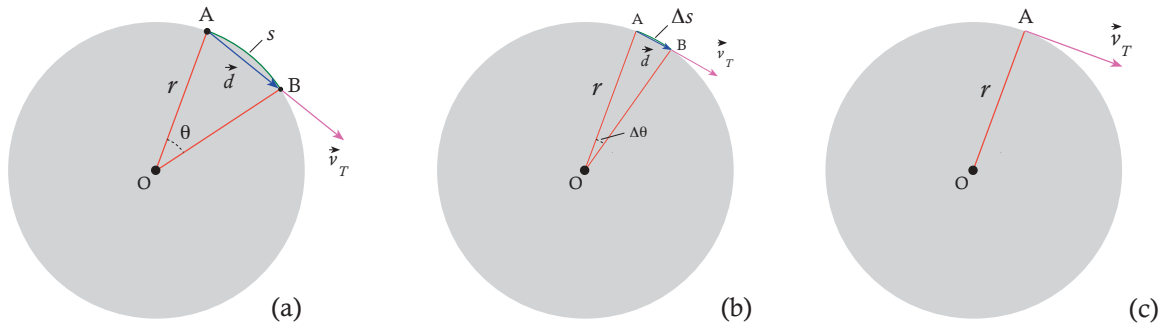


Fig. 7.8 El vector velocidad tangencial es siempre tangente a la circunferencia, en el punto donde se mide la velocidad instantánea. A medida que el punto B se acerca al punto A, la longitud del recorrido, s , tiende a hacerse igual a la magnitud del vector desplazamiento.

La rapidez media, denotada como v_T se mide sobre el arco de circunferencia s y es, por definición:

$$v_T = \frac{\text{Longitud arco circunferencia}}{\text{Tiempo empleado}} = \frac{s}{t} \quad (7.17)$$

La velocidad media, $\vec{v}_T$, se define en término del vector desplazamiento:

$$\vec{v}_T = \frac{\text{Vector desplazamiento}}{\text{Tiempo empleado}} = \frac{\vec{d}}{t} \quad (7.18)$$

En la fig. 7.8(a) se presentan las cantidades involucradas en las dos relaciones anteriores. El vector velocidad, como se puede ver, tiene la misma dirección del vector desplazamiento. En este caso, como el valor de s es grande, la longitud del arco de circunferencia es distinta de la magnitud del vector desplazamiento. En la fig. 7.8(b), el punto B se acerca al punto A y la longitud del vector desplazamiento ya es comparable con la magnitud del arco Δs . En el límite, cuando el punto B se acerca suficientemente al punto A, hasta confundirse con él, las longitudes del arco s y del vector desplazamiento coinciden, tal como se indica en la fig. 7.8(c). Este último caso evidencia dos aspectos importantes: a) La velocidad es tangencial al punto A. b) La velocidad tangencial es perpendicular al radio de la circunferencia.

Los módulos de la velocidad tangencial y de la velocidad angular están relacionados por ecuaciones sencillas. Es conocida la relación entre el arco de

una circunferencia y el ángulo subtendido por el mismo. Así, para la fig. 7.8(b) podemos escribir:

$$\Delta s = r \Delta \theta \quad \Rightarrow \quad \Delta \theta = \frac{\Delta s}{r} \quad (7.19)$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación anterior por Δt :

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{1}{r} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (7.20)$$

Ahora bien, cuando el intervalo de tiempo transcurrido, Δt , es muy pequeño, el punto A se aproxima al B, lo que en términos matemáticos se expresa como:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \frac{1}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (7.21)$$

Pero, de acuerdo a la relación (7.2), el primer miembro de la ecuación anterior es el módulo de la velocidad angular ω , mientras que el segundo miembro corresponde a la velocidad tangencial en el punto A. Luego, podemos escribir:

$$\omega = \frac{1}{r} v_T \quad \Rightarrow \quad v_T = r \omega \quad (7.22)$$

Expresión que nos dice que la velocidad tangencial de una partícula se incrementa a medida que nos alejamos del eje de rotación. Observa que si la velocidad angular se mide en rad/s y la distancia radial se mide en metros, la velocidad tangencial resulta en m/s.

Ejemplo 7.3

Un disco de 60 cm de diámetro comienza a girar alrededor de un eje fijo con una velocidad angular inicial de 2 rps. Si la aceleración angular es de 3 rev/s², determina: **a)** La velocidad angular en un tiempo de 5 s. **b)** El ángulo barrido por el disco en ese tiempo. **c)** La velocidad tangencial de una partícula situada en la periferia del disco.

Solución

Se tiene la siguiente información:

Radio del disco: $r = 30 \text{ cm}$

$$\omega_o = 2 \text{ rev/s} = 2 \cdot 60 \text{ rpm} = 120 \text{ rpm} =$$

$$= \frac{120 \cdot 2\pi}{60} \text{ rad/s} = 4\pi \text{ rad/s}$$

$$\alpha = 3 \text{ rev/s}^2 = 3 \cdot 2\pi \text{ rad/s}^2 = 6\pi \text{ rad/s}^2$$

a) La velocidad angular puede calcularse mediante la relación (7.9):

$$\begin{aligned} \omega &= \omega_o + \alpha t = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} + 6\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 5 \text{ s} \\ &= (4\pi + 30\pi) \text{ rad/s} = 34\pi \text{ rad/s} \end{aligned}$$

b) De acuerdo con (7.14):

$$\begin{aligned} \theta &= \omega_o t + \frac{1}{2} \alpha t^2 = 4\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}} \cdot 5 \text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 6\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 25 \text{ s}^2 = \\ &= (20\pi + 75\pi) \text{ rad} = 95\pi \text{ rad} \end{aligned}$$

c) Según (7.22):

$$v_T = r\omega = 30 \text{ cm} \cdot 34\pi \text{ rad/s} = 1.020\pi \text{ cm/s}$$

tangencial y la aceleración centrípeta o radial. La primera, es la causante de la variación de la velocidad de la partícula a lo largo de la trayectoria circular, mientras que la segunda obliga cambios en la dirección de la velocidad de la partícula.

En la fig. 7.9(a) se muestra un ventilador de aspas en el cual se han seleccionado los puntos A y B cuyas velocidades están representadas por $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$, respectivamente. Tanto la magnitud como la dirección de la velocidad varían a medida que las aspas rotan en el sentido de las agujas del reloj. Estos cambios en la magnitud y en la dirección de la velocidad son, precisamente, causados por las aceleraciones tangencial y centrípeta, respectivamente. Como consecuencia de la aceleración tangencial, el vector $\vec{v}_2$ tiene mayor magnitud que el vector $\vec{v}_1$ y, producto de la aceleración centrípeta, las direcciones de los dos vectores difieren en los puntos A y B.

En la fig. 7.9(b) se muestra el diagrama vectorial para determinar la resultante, $\vec{v}$, de estas dos velocidades. La aceleración tangencial media está dada por:

$$\vec{a}_m = \frac{\vec{v}}{t_2 - t_1} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \quad (7.23)$$

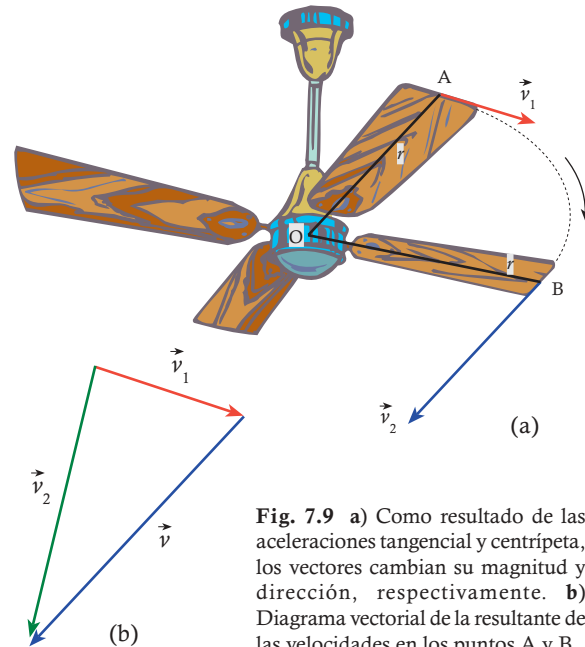


Fig. 7.9 **a)** Como resultado de las aceleraciones tangencial y centrípeta, los vectores cambian su magnitud y dirección, respectivamente. **b)** Diagrama vectorial de la resultante de las velocidades en los puntos A y B.

7.7 ACCELERACIÓN CENTRÍPETA Y ACCELERACIÓN TANGENCIAL

Tal como se estableció en la sección 7.2 de este capítulo, en un movimiento circular se generan dos tipos de aceleraciones, para una partícula que se mueve en un cuerpo en rotación: la aceleración

Como se puede deducir de la relación anterior, la dirección de la aceleración es la misma que la del vector $\vec{v}$ de la velocidad resultante. Se debe mencionar, además, que en todo momento las velocidades tangenciales $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ están relacionadas, mediante la relación (7.22). Es decir:

$$v_1 = r\omega_1 \quad v_2 = r\omega_2 \quad (7.24)$$

donde ω_1 y ω_2 son los módulos de las velocidades angulares en los puntos A y B. Ha de destacarse que si las velocidades angulares en los puntos A y B son distintas, existe una aceleración angular α .

Con el fin de determinar una expresión de la aceleración de una partícula que gira alrededor de un eje fijo, consideremos la fig. 7.10, donde se presenta una rueda que rota con velocidad angular uniforme. Esto se pone de manifiesto en la figura, por la igual longitud de los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$. En la fig. 7.10(a) los puntos A y B están situados en el borde de la rueda dentada y el ángulo barrido durante el intervalo de tiempo que empleó la partícula en ir entre esos dos puntos es $\Delta\theta$. El radio de la rueda es r . Como se puede ver, a pesar de que la magnitud del vector que representa la velocidad instantánea en cada punto, permanece constante, por tratarse de un movimiento uniforme, su dirección cambia constantemente, a medida que la rueda gira.

En la fig. 7.10(b) se presenta el diagrama vectorial de las velocidades en los puntos A y B. El ángulo entre los dos vectores es exactamente igual

al ángulo $\Delta\theta$, barrido por la rueda al girar. Cuando el punto B se acerca al punto A, el intervalo de tiempo Δt , transcurrido en ir de un punto al otro es muy pequeño, lo que se simboliza por la expresión $\Delta t \rightarrow 0$. Bajo esta condición, el vector $\vec{v}_2$ se aproxima al vector $\vec{v}_1$ y el vector resultante $\Delta\vec{v}$ también se hace muy pequeño. Como resultado, fig. 7.10(c), el vector velocidad resultante, $\Delta\vec{v}$, forma un ángulo de 90° con respecto al vector velocidad tangencial $\vec{v}_T$. Como la aceleración tiene la misma dirección de la velocidad resultante, el vector aceleración, $\vec{a}_R$, es un vector radial y perpendicular a $\vec{v}_T$.

La aceleración radial o centrípeta, en el movimiento circular uniforme, es un vector perpendicular al vector velocidad tangencial y está dirigido hacia el eje de rotación.

De acuerdo a lo discutido anteriormente, el vector aceleración instantánea y su magnitud en el punto A de la fig. 7.10 están dados por:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \quad a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (7.25)$$

A medida que $\vec{v}_2$ se acerca a $\vec{v}_1$, el ángulo $\Delta\theta$, se hace cada vez más pequeño. Si dicho ángulo se mide en radianes, la magnitud de $\Delta\vec{v}$ puede expresarse aproximadamente como:

$$\Delta v = v\Delta\theta \quad (\text{con } v_2 = v_1 = v) \quad (7.26)$$

Dividiendo ambos miembros de (7.26) entre Δt :

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = v \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \quad (7.27)$$

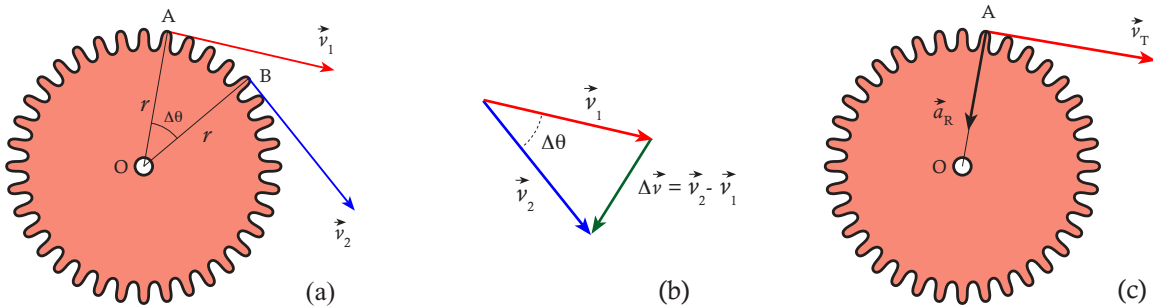


Fig. 7.10 a) La rueda se mueve con velocidad angular uniforme y, por tanto, el módulo de la velocidad angular en cualquier punto se mantiene constante. b) Diagrama vectorial de la resultante de las velocidades en los puntos A y B. c) A medida que el punto B se aproxima al punto A, la variación del vector $\Delta\vec{v}$ se hace cada vez menor y la aceleración centrípeta o radial $\vec{a}_R$, tiene dirección normal con respecto a la velocidad tangencial $\vec{v}_T$.

Si el tiempo entre A y B se considera muy pequeño ($\Delta t \rightarrow 0$), podemos escribir:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v \frac{\Delta \theta}{\Delta t} = v \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

De acuerdo a las definiciones de aceleración instantánea y velocidad angular dadas, tenemos:

$$\vec{a}_R = \lim \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \omega = \lim \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

Dado que $v = v_T$ se concluye que:

$$a_R = v_T \omega \quad (7.28)$$

Relación que indica la manera cómo está relacionado el módulo de la aceleración centrípeta o radial con los módulos de las velocidades tangencial y angular. De acuerdo a la relación (7.22), la velocidad tangencial es $v_T = r\omega$. Sustituyendo en (7.28) se obtiene:

$$a_R = v_T \omega = r\omega^2 = \frac{v_T^2}{r} \quad (7.29)$$

Hay que enfatizar que, en el caso estudiado, la rapidez angular permanecía constante y, en consecuencia, no existía aceleración tangencial. Otra es la situación cuando α es distinta de cero. En este caso varían tanto la magnitud como la dirección de

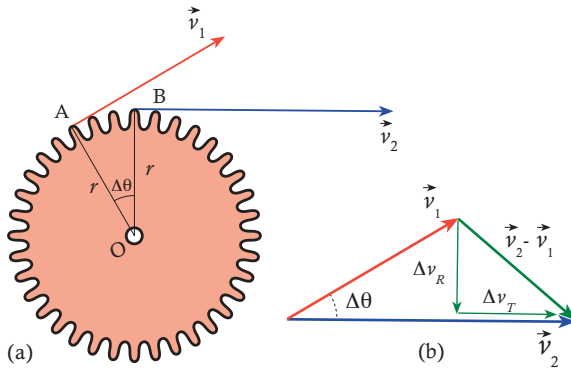


Fig. 7.11 a) Los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ difieren tanto en magnitud como en dirección, dando origen a una aceleración angular. b) Diagrama vectorial de la resultante de las velocidades en los puntos A y B.

la velocidad tangencial. En la fig. 7.11(a), el vector $\vec{v}_2$ tiene una magnitud mayor que el vector $\vec{v}_1$ y sus direcciones son completamente diferentes. El diagrama vectorial se presenta en la fig. 7.11(b). El vector $\Delta \vec{v}$ corresponde a la diferencia vectorial entre $\vec{v}_2$ y $\vec{v}_1$. Este vector puede descomponerse en dos componentes perpendiculares entre sí: Δv_R y Δv_T . La primera toma en cuenta la variación de la velocidad debido al cambio de dirección, mientras que la segunda toma en cuenta el cambio de la velocidad tangencial, desde el punto A al punto B.

Cuando acercamos el punto A al punto B, el ángulo $\Delta \theta$ se hace cada vez más pequeño y los vectores $\vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ se aproximan uno al otro. Bajo estas condiciones, podemos escribir:

$$\Delta v_T = v_2 - v_1$$

Como $v_2 = r\omega_2$ y $v_1 = r\omega_1$, tenemos:

$$\Delta v_T = r\omega_2 - r\omega_1 = r(\omega_2 - \omega_1) = r\Delta \omega \quad (7.30)$$

En el límite, cuando $\Delta t \rightarrow 0$ y, dividiendo ambos miembros de la relación anterior por Δt , se obtiene:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_T}{\Delta t} = r \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} \quad (7.31)$$

De acuerdo a lo ya estudiado, el primer miembro de (7.31) corresponde a la aceleración tangencial a_T , mientras que en el segundo miembro aparece la aceleración angular α . Luego (7.31) se transforma en:

$$a_T = r\alpha \quad (7.32)$$

El módulo de la aceleración resultante es, finalmente,

$$a = \sqrt{a_R^2 + a_T^2} = \sqrt{r^2\omega^4 + r^2\alpha^2} = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \quad (7.33)$$

Ejemplo 7.4

El cuerpo humano puede soportar una aceleración máxima igual a 9 veces la aceleración de gravedad. Un piloto de prueba se lanza en una pirueta, tal como se muestra en la fig. 7.12, en la cual la velocidad lineal del avión es de 250 m/s. ¿Cuál es el mínimo radio de curvatura que puede girar el avión para garantizar un vuelo seguro?

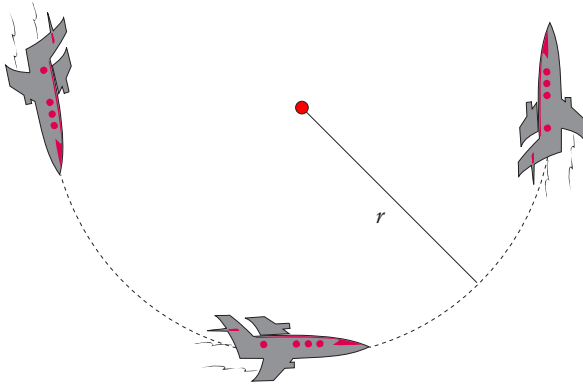


Fig. 7.12 Ejemplo 7.4: ¿Cuál debe ser el mínimo radio de curvatura para que un piloto pueda soportar la aceleración a la que es sometido, por efecto de la aceleración centrípeta?

Solución

De acuerdo a lo planteado en el problema, la aceleración radial máxima que puede resistir el piloto y la velocidad tangencial del avión están dadas por:

$$a_R = 9 \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 88,2 \text{ m/s}^2 \quad v_T = 250 \text{ m/s}$$

Usando la relación (7.29):

$$a_R = \frac{v_T^2}{r} \Rightarrow r = \frac{v_T^2}{a_R}$$

Sustituyendo los valores dados:

$$r = \frac{(250 \text{ m/s})^2}{88,2 \text{ m/s}^2} = \frac{625.000 \text{ m}^2/\text{s}^2}{88,2 \text{ m/s}^2} = 7.086,17 \text{ m}$$

Es decir, el radio del giro a efectuar no puede ser menor de 7,08 km.

Ejemplo 7.5

La rueda grande de la fig. 7.13 tiene un radio de 10 cm, parte del reposo y acelera uniformemente hasta adquirir una velocidad angular de 100 rpm en 10 s.

a) ¿Qué posición tendrá la partícula colocada en el punto P al cabo de 2 s? **b)** ¿Cuáles son los valores de la aceleración centrípeta y tangencial en 2 s? Representa gráficamente los vectores correspondientes a $\vec{a}_T$ y $\vec{a}_R$, cuando $t = 2 \text{ s}$.

Solución

Para este ejemplo se conocen las siguientes cantidades:

$$\omega_o = 0 \quad \omega = 100 \text{ rpm para } t = 10 \text{ s}$$

Reduzcamos la velocidad angular de rpm a rad/s:

$$\omega = 100 \text{ rpm} = \frac{2\pi}{60} \cdot 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 10,47 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

a) Como el movimiento es uniformemente acelerado, utilizaremos la relación (7.9) para determinar la aceleración de la rueda:

$$\alpha = \frac{\omega}{t} = \frac{10,47 \text{ rad/s}}{10 \text{ s}} = 1,05 \text{ rad/s}^2$$

El ángulo barrido en un tiempo de 2 s puede calcularse usando (7.14) con $\omega_o = 0$:

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1,05 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \cdot 4 \text{ s}^2 = 2,10 \text{ rad}$$

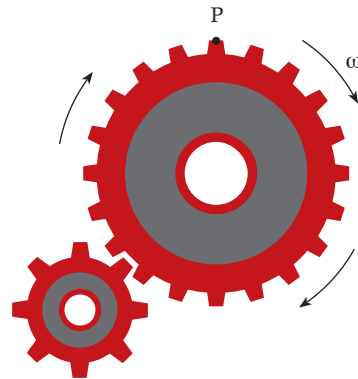


Fig. 7.13 Ejemplo 7.5.

Este valor es equivalente en grados a:

$$\theta = \frac{180}{\pi} \cdot 2,10^\circ = 120,32^\circ$$

Lo que significa que la partícula se movió desde el punto P hasta el punto Q, señalado en la fig. 7.14.

b) La velocidad angular cuando $t = 2$ s, está dada por:

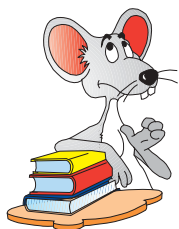
$$\omega = \alpha t = 1,05 \text{ rad/s}^2 \cdot 2 \text{ s} = 2,10 \text{ rad/s}$$

Las expresiones para las magnitudes de las aceleraciones radial y tangencial son:

$$a_R = r\omega^2 = 0,10 \text{ m} \cdot (2,10 \text{ rad/s})^2 = 0,44 \text{ m/s}^2$$

$$a_T = r\alpha = 0,10 \text{ m} \cdot 1,05 \text{ rad/s}^2 = 0,11 \text{ m/s}^2$$

En la fig. 7.13 se muestra la ubicación de los vectores correspondientes.



PIENSA Y EXPLICA



- 7.1** Cita varios ejemplos de movimiento circular.
- 7.2** ¿Qué diferencia hay entre un cuerpo que rota o gira y otro que realiza una revolución? Da ejemplos para ambos casos.
- 7.3** ¿Qué es un movimiento circular? ¿Qué es un movimiento circular uniforme? ¿Es uniforme todo movimiento circular? Explica.
- 7.4** Si el vector que representa a la velocidad en la fig. 7.1 tiene la misma longitud a lo largo de la trayectoria curvilínea, ¿hay aceleración en el movimiento?
- 7.5** Explica el diagrama de la fig. 7.2 y cómo se producen cambios en la dirección y magnitud del vector velocidad.
- 7.6** Define aceleración centrípeta y aceleración tangencial en el movimiento curvilíneo. ¿Están ambas presentes en el movimiento circular uniforme? ¿En qué unidades se miden?

- 7.7** Define la rapidez angular media y la rapidez angular instantánea, mediante el uso de la fig. 7.4. ¿En qué unidades se miden ambas velocidades?
- 7.8** ¿Qué es la aceleración angular en un movimiento circular? ¿En qué unidades se mide?
- 7.9** En un movimiento circular uniforme, ¿hay un componente tangencial de la aceleración?
- 7.10** Si una rueda gira con velocidad angular variable, ¿hay en su borde aceleración radial o tangencial?
- 7.11** Si una rueda gira con aceleración angular constante, ¿hay en su borde aceleración radial o tangencial?
- 7.12** Identifica los tres controles de un vehículo, que pueden acelerarlo.
- 7.13** Investiga lo que se ha designado como "aceleración" centrífuga.

7.14 La bola roja de la fig. 7.14 gira alrededor del punto O, mediante una cuerda que la sujeta al mismo. Si la cuerda se rompe en el punto Q, ¿en cuál de las tres direcciones mostradas seguirá la bola moviéndose?

7.15 ¿Es posible la existencia del movimiento circular sin la presencia de la aceleración centrípeta? Razona tu respuesta.

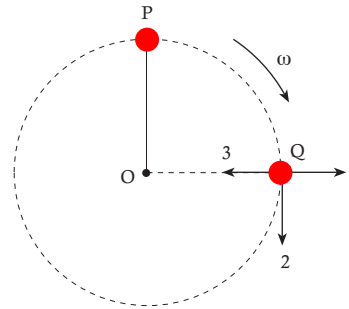


Fig. 7.14 ¿Qué dirección seguirá la bola al romperse la cuerda en Q?



PROBLEMAS



7.1 Convierte: a) 8 radianes a grados. b) 180 rad/s a rpm. c) 360 rpm a rad/s.

7.2 ¿Cuál es el valor en radianes de un arco de 50 cm de longitud, situado sobre una circunferencia de 20 cm de radio?

7.3 Un disco gira con velocidad angular uniforme e igual a 1.200 rpm. En el momento que se comienza a observar una partícula, ésta forma un ángulo de 30° con respecto a un punto de referencia. ¿Qué ángulo habrá girado, una vez transcurrido un tiempo de 10 s?

7.4 Un disco gira con una aceleración constante de $3,5 \text{ rad/s}^2$. ¿Cuántas vueltas habrá dado en 7 s, luego de arrancar?

7.5 Un motor rota con una rapidez angular de 2.000 rpm. Si disminuye esta rapidez hasta 900 rpm en 3 s, determina: a) La aceleración angular del motor. b) El número de revoluciones que da en ese tiempo? c) Si mantiene esa aceleración, ¿cuánto tiempo tardará en detenerse?

7.6 Una rueda gira con una aceleración de 18 rad/s^2 . Si parte del reposo, a) ¿Cuántas vueltas dará en 6 s? b) ¿Qué ángulo habrá girado en 10 s?

7.7 Una piedra atada a una cuerda de 2 m rota en movimiento circular con una velocidad angular constante de 5 rad/s . Determina: a) La velocidad tangencial. b) La aceleración tangencial. c) La aceleración centrípeta. d) Si la piedra tiene una masa de 4 kg, determina la fuerza que se ejerce sobre la misma.

7.8 Una rueda de 100 cm de diámetro gira alrededor de su eje con una velocidad angular inicial de 120 rpm. Si la aceleración tangencial de la rueda es de 15 rad/s^2 , calcula: a) La velocidad angular luego de 5 s. b) El ángulo girado en ese tiempo. c) ¿Cuál es la velocidad tangencial de un punto situado en el borde de la rueda cuando $t = 10 \text{ s}$? d) ¿Cuál es el valor de la aceleración resultante para $t = 10 \text{ s}$?

- 7.9** El piloto de un avión de combate, que se ha estado moviendo con una velocidad de 432 km/h, hace una pirueta circular en un plano vertical. **a)** ¿Cuál es el radio mínimo de la trayectoria del avión para que la aceleración sobre el piloto no exceda 8 veces la aceleración de gravedad? **b)** Si la masa del piloto es de 85 kg, ¿cuánto es su peso aparente en el punto más bajo de la trayectoria?
- 7.10** Una rueda giratoria de 5 m de diámetro da 10 vueltas cada minuto. Determina: **a)** La rapidez angular. **b)** La velocidad tangencial. **c)** La aceleración centrípeta. **d)** El número de vueltas que da en 0,5 h. **e)** El tiempo que tarda en dar 100 vueltas.
- 7.11** El radio de la órbita de la luna *Io* alrededor del planeta Júpiter es de $4,2 \cdot 10^5$ km. Si tarda 42,5 h en dar una vuelta completa al planeta, determina: **a)** La velocidad angular. **b)** La velocidad tangencial. **c)** La aceleración centrípeta
- 7.12** Un carro de 1.110 kg se desplaza en una pista circular de radio 30 m. El coeficiente de fricción entre los cauchos y el pavimento es 0,80. Determina la velocidad máxima a la que se puede mover el carro sin salirse de su recorrido.

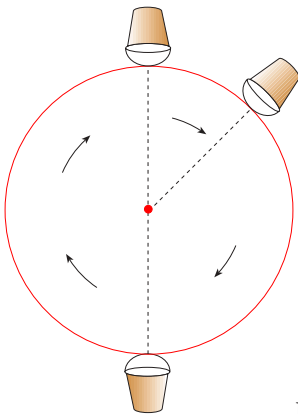


Fig. 7.15 Ejemplo 7.13.

- 7.13** Un balde de agua de 2 kg de masa está atado a una cuerda de radio igual a 1,5 m y se mueve en una trayectoria circular, como se muestra en la fig. 7.15. Si la velocidad del balde en la parte superior es de 5 m/s, determina: **a)** La aceleración y la fuerza neta sobre el mismo. **b)** ¿Cuál es la aceleración y la fuerza neta sobre el balde en la parte inferior, si su velocidad es de 7 m/s?
- 7.14** La Luna completa una revolución alrededor de la Tierra en unos 27,3 días. Si se considera que su órbita es aproximadamente circular, con un radio de $3,84 \cdot 10^8$ m, determina la velocidad y aceleración centrípeta de la Luna
- 7.15** Una piedra se hace girar atada al extremo de una cuerda que mide 1,50 m, tal como se muestra en la figura 7.16. Si la velocidad de giro es constante e igual a 2 rad/s, calcula la distancia que alcanzará la piedra si se rompe la cuerda. El plano del círculo generado por el movimiento está a una altura de 2,10 m del suelo.

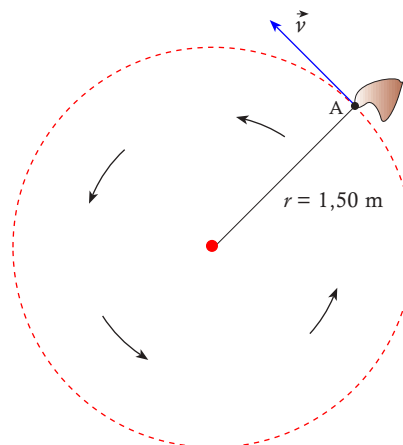
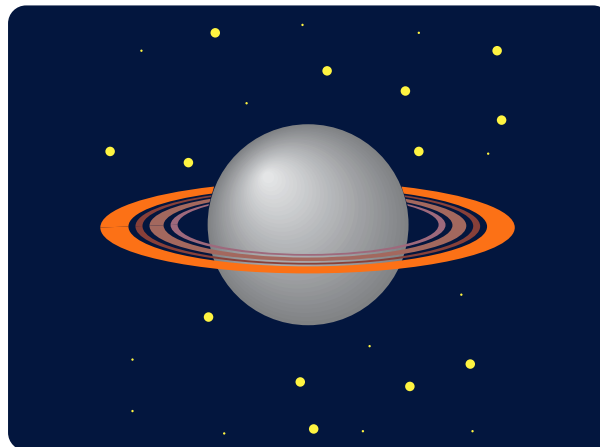


Fig. 7.16 Ejemplo 7.15.

CAPÍTULO 8

Movimiento Armónico Simple



8.1 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Para introducir el estudio de este movimiento, veamos, en primer lugar, lo que significa movimiento armónico. *Un movimiento armónico es un movimiento que un cuerpo o partícula realiza en forma oscilante; es decir, el cuerpo o partícula va y viene, siguiendo siempre la misma trayectoria.* En la vida cotidiana tenemos muchos ejemplos de este movimiento: cuando caminamos, nuestros brazos oscilan siguiendo la misma trayectoria, el péndulo de un reloj de pared oscila alrededor de un punto fijo, los columpios para mecerse los niños en los parques de atracciones también realizan movimientos armónicos, el movimiento circular o elíptico de los planetas alrededor de el Sol. El nombre de movimiento armónico se debe a la regularidad de la forma cómo se realiza; es decir, a la armonía que se mantiene en el ir y venir del movimiento y en la persistencia, en forma continua, de una frecuencia siempre igual. Los movimientos oscilatorios no siempre son armónicos, pues no todos mantienen la misma frecuencia. El tipo de movimiento armónico que estudiamos aquí es aquel cuya descripción matemática puede hacerse utilizando las conocidas funciones trigonométricas del seno y el coseno, que son funciones armónicas con una única frecuencia. Por esta razón se denomina *movimiento armónico simple*.

Ahora bien, por ser el movimiento armónico simple un movimiento oscilante, es un movimiento periódico. Por lo tanto, su estudio se realiza aplicando los conceptos de *período*, *frecuencia* y *ciclo*.

Para explicar los conceptos mencionados, tomemos como ejemplo el caso de un columpio con un niño que queremos mecer. Como todos sabemos hacerlo, de la posición de reposo halamos hacia nosotros el conjunto columpio-niño, para darle un impulso e iniciar el movimiento. De esta manera, el conjunto columpio-niño baja siguiendo una trayectoria circular, pasa por la posición de reposo o equilibrio, sube hasta detenerse, para bajar, luego, en sentido inverso, pasar de nuevo por la posición de reposo y subir hasta nuestras manos para continuar dándole impulso, si queremos continuar el movimiento. Debido al roce en el eje de oscilación y a la resistencia del aire, sin un impulso el columpio se pararía, finalmente, en la posición de equilibrio.

La ejecución del movimiento desde que soltamos el columpio y el mismo regresa de nuevo a nuestras manos, se denomina *ciclo*. *El ciclo es, pues, la realización completa de un movimiento desde que parte de un punto y vuelve a este mismo punto.* El *período*, simbolizado por T , es el tiempo invertido en realizar un ciclo. *La cantidad de ciclos que una partícula o cuerpo realiza en la unidad de tiempo, usualmente un segundo, se denomina frecuencia*, la cual se simboliza por la letra f . Por ejemplo, la Tierra ejecuta un ciclo cada vez que da una vuelta alrededor de el Sol. Como el tiempo que tarda en hacerlo es de 1 año, el período de este movimiento de rotación es igual a 1 año. La frecuencia correspondiente es de 1 ciclo por año. Similarmente, cuando decimos que la onda correspondiente a la tensión eléctrica que llega a nuestros hogares es de 60 ciclos por segundo (60 ciclos/s) estamos afirmando que en 1 segundo, la

onda representativa de este fenómeno completa 60 ciclos; es decir, se repite 60 veces en 1 segundo.

El **ciclo** corresponde a la realización completa de un movimiento, desde que parte de un punto y vuelve a este mismo punto. El **período**, T , es el tiempo invertido en realizar un ciclo. La cantidad de ciclos que una partícula o cuerpo realiza en la unidad de tiempo, se denomina **frecuencia**.



La frecuencia y el período están relacionados mediante la siguiente expresión:

$$f = \frac{1}{T} \quad (8.1)$$

La unidad SI de frecuencia es s^{-1} y se denomina hertz, se simboliza por Hz, y 1 Hz es equivalente a 1 ciclo/s (1 cps). En el ejemplo del columpio, se puede ver que si éste realiza 2 ciclos en 1 s, el período será igual a 0.5 s, lo cual puede verificarse por la fórmula con $f = 2$:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{2 \text{ s}^{-1}} = 0,5 \text{ s}$$

8.2 DESPLAZAMIENTO EN EL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

Refiriéndonos a la fig. 8.1, imaginemos que la partícula ubicada en el punto P realiza un movimiento circular uniforme sobre una circunferencia de radio A , con una velocidad angular ω y en sentido contrario a las manecillas del reloj. En cualquier instante de tiempo, t , el desplazamiento angular de la partícula será θ , ángulo que puede expresarse en función de la velocidad angular como $\theta = \omega t$. A medida que la partícula rota, ocupa distintos puntos a lo largo de la circunferencia.

Si establecemos un sistema de coordenadas con el origen, O, en el centro del movimiento circular, podemos proyectar sobre el eje de las X, cualquier posición de la partícula en la trayectoria de su movimiento. Así, cuando la posición de la partícula es P, su proyección sobre el eje de las X es Q. En una revolución completa de la partícula, las proyecio-

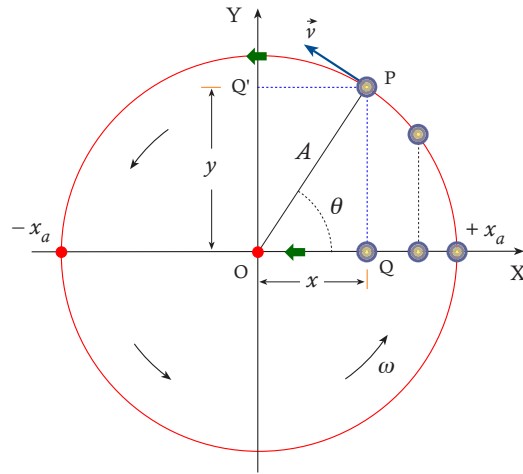


Fig. 8.1 La partícula colocada en el punto Q realiza un movimiento circular uniforme. La proyección de P sobre el eje X es el punto Q, el cual oscila con movimiento armónico simple entre $+x_a$ y $-x_a$.

nes de todas sus posiciones, en la trayectoria circular, nos dará como resultado un movimiento de dichas proyecciones desde $+x_a$ hasta $-x_a$, que corresponde a un desplazamiento angular de π radianes y, luego, desde $-x_a$ hasta $+x_a$, correspondiente también a π radianes. En total, el desplazamiento angular es de 2π radianes, al completarse una revolución completa.

El movimiento de los puntos sobre el eje X, como consecuencia de la trayectoria circular de la partícula, es un movimiento armónico simple y puede ser tomado como base para deducir la ecuación del desplazamiento de este movimiento. De la misma forma, si proyectamos las posiciones de la partícula sobre el eje Y, obtenemos puntos que representan un movimiento armónico simple sobre este eje. La ecuación del desplazamiento del punto Q, respecto al origen O, es:

$$x = A \cos \theta \quad (8.2)$$

En esta ecuación, x es el desplazamiento de Q respecto al origen O, al cual se le da el nombre de *elongación* y A es el desplazamiento máximo de Q, el cual se denomina *amplitud* de la oscilación. El desplazamiento máximo ocurre, por supuesto, al iniciarse el movimiento cuando $t = 0$ y $\theta = 0$, para lo cual $\cos \theta = 1$ y, por lo tanto, $x = A$.

Como estamos tratando con un movimiento circu-

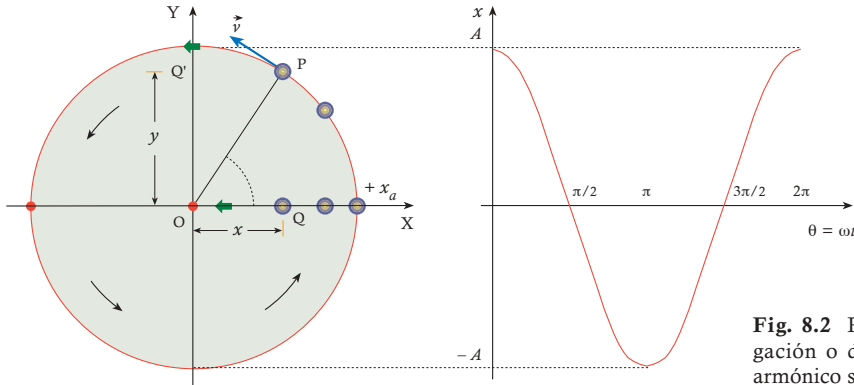


Fig. 8.2 Representación gráfica de la elongación o desplazamiento en el movimiento armónico simple, en función del ángulo.

lar uniforme en el cual $\theta = \omega t$, podemos escribir la ecuación anterior como:

$$x = A \cos \omega t \quad (8.3)$$

Esta es la ecuación del *desplazamiento* o *elongación*, en cualquier instante de tiempo t , del movimiento armónico simple, en función de la *amplitud*, A , y de la velocidad angular ω . En una revolución completa, el ángulo barrido por la partícula que se desplaza en una trayectoria circular es 2π radianes. El tiempo utilizado para hacer este recorrido corresponde al período T . Luego, la velocidad angular constante se puede expresar como:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \omega = 2\pi f \quad (8.4)$$

Combinando (8.3) y (8.4) con (8.2):

$$x = A \cos \frac{2\pi}{T} t = A \cos 2\pi f t \quad (8.5)$$

La elongación x representada por la relación anterior es una función trigonométrica del tipo senoidal, la cual se puede graficar en un sistema de ejes coordenados, dándole al ángulo θ , los valores de 0 , $\pi/2$, π , $3\pi/2$, 2π , tal como se muestra en la fig. 8.2.

8.3 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE: VELOCIDAD

Consideremos una partícula que se mueve en torno a la circunferencia de radio A con velocidad lineal o tangencial constante y la cual, en un instante de

tiempo, t , está ocupando la posición P , como se muestra en la figura 8.3. La velocidad tangencial puede descomponerse en sus componentes vertical, $\vec{v}_y$, y horizontal, $\vec{v}_x$, correspondientes a las velocidades con respecto a los ejes Y y X , respectivamente. La componente $\vec{v}_x$ refleja la velocidad del punto Q , que es la proyección del punto P , sobre el eje X . Observa que esta velocidad está dirigida hacia la izquierda y, por tanto, se le puede asignar un signo negativo. De acuerdo a lo estudiado en el capítulo anterior:

$$v = \omega A = 2\pi f A \quad (8.6)$$

Según la fig. 8.3, podemos escribir:

$$\sin \theta = \frac{-v_x}{v} \Rightarrow v_x = -v \sin \theta \quad (8.7)$$

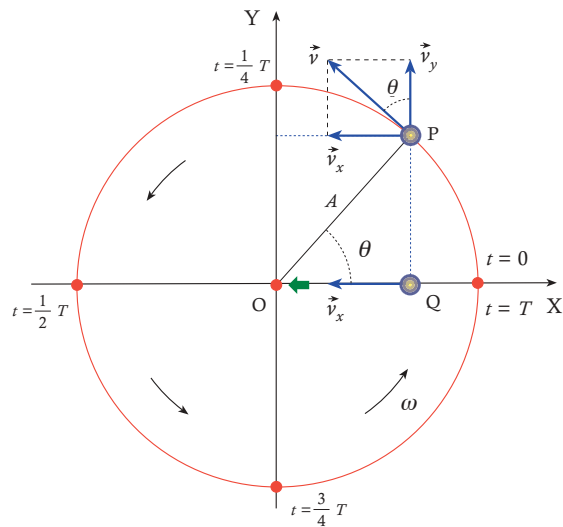


Fig. 8.3 El punto Q , proyección de P , se mueve desde un máximo $x = A$, cuando $v_x = 0$, hasta un mínimo $x = -A$, donde v_x es, similarmente, igual a cero.

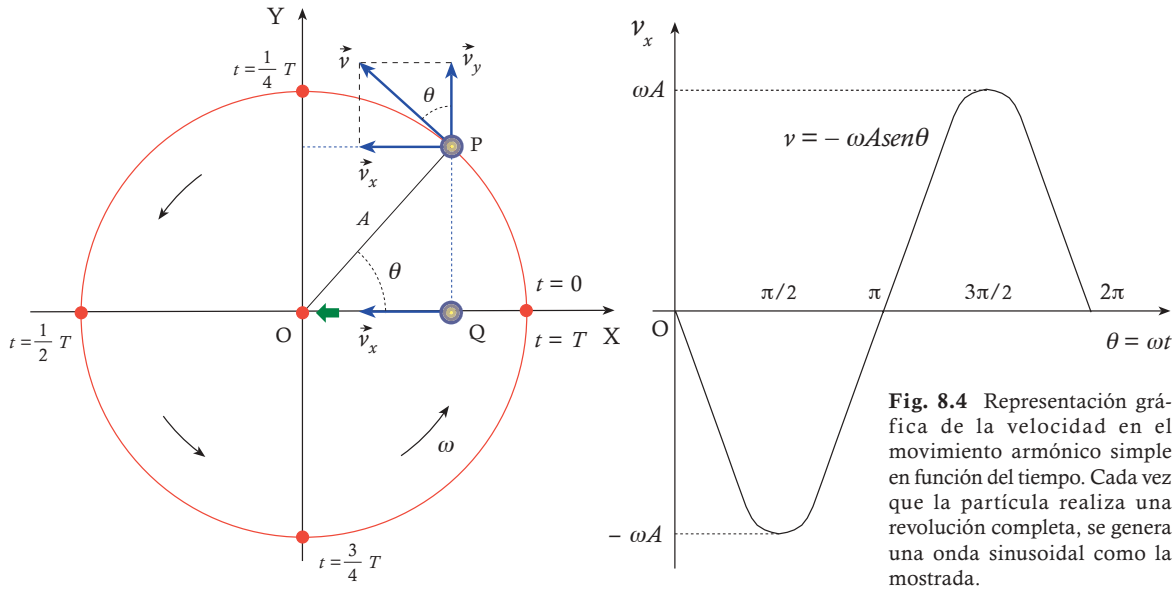


Fig. 8.4 Representación gráfica de la velocidad en el movimiento armónico simple en función del tiempo. Cada vez que la partícula realiza una revolución completa, se genera una onda sinusoidal como la mostrada.

Usando la relación (8.6) y, tomando en cuenta que $\theta = \omega t$, se tiene:

$$v_x = -\omega A \text{sen} \omega t \quad (8.8)$$

Si analizamos la ecuación anterior, refiriéndonos a la fig 8.3, podemos darnos cuenta que la partícula P tiene velocidad v_x igual a cero para sus desplazamientos máximos $x = +A$ y $x = -A$, ya que para $x = +A$, correspondiente a $t = 0$ y $\theta = 0$, se tiene que $\text{sen } 0^\circ = 0$. El movimiento en este punto o bien se inicia, o bien se detiene momentáneamente para cambiar de sentido, y para $x = -A$, $t = T/2$, se tiene que $\theta = \pi$, y $\text{sen } \pi = 0$, el movimiento también se detiene en este punto para cambiar de sentido. Para $t = T/4$ y $\theta = \pi/2$, $\text{sen } \pi/2 = 1$ por lo que $v_x = -\omega A$ que es su valor máximo negativo y para $t = 3T/4$ y $\theta = (3/2)\pi$, se tiene que $\text{sen } (3/2)\pi = -1$, y $v_x = \omega A$, valor máximo positivo; es decir, en el punto de equilibrio, las velocidades en el primer medio ciclo y en el segundo medio ciclo son iguales, pero de signo opuesto.

Igual que en el caso del desplazamiento, podemos obtener en forma gráfica la velocidad en función del ángulo, dándole a θ los valores: $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$, como se muestra en la fig 8.4.

8.4 MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE: ACELERACIÓN

Como se estudió en el movimiento circular uniforme, el hecho de que la velocidad tangencial esté cambiando continuamente de dirección, nos indica que es un movimiento acelerado y, efectivamente, en este movimiento existe la aceleración centrípeta, dirigida continuamente hacia el centro de la trayectoria del movimiento circular. La fig. 8.5 nos permite deducir la ecuación correspondiente de la aceleración en el movimiento armónico simple. Si descomponemos el vector aceleración centrípeta de la partícula P en sus componentes rectangulares, la componente $\vec{a}_x$ es igual a la aceleración del punto Q (proyección de P). De la fig. 8.5 se determina que:

$$a_x = -a_c \cos \theta$$

Como $a_c = A\omega^2$ y $\theta = \omega t$:

$$a_x = -A\omega^2 \cos \omega t \quad (8.9)$$

Si analizamos la ecuación anterior, podemos ver que para $\omega t = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, y $a_x = -A\omega^2$ y para $\omega t = \pi$, $\cos \pi = -1$, $a_x = A\omega^2$. Esto nos indica que en los dos

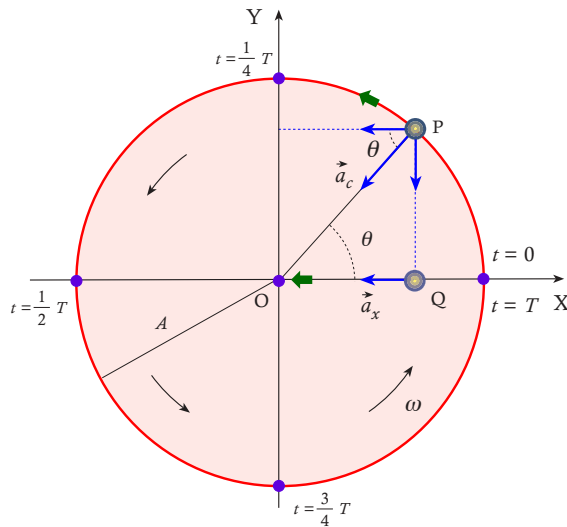


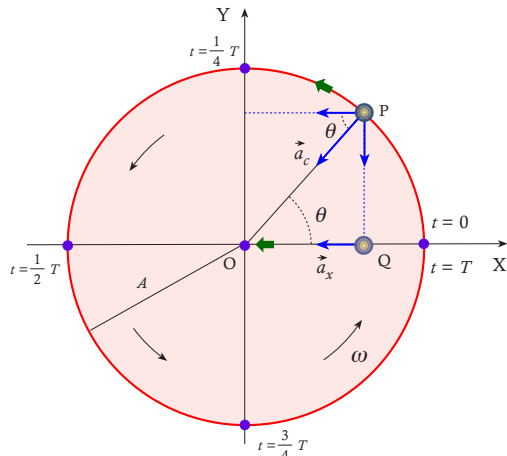
Fig. 8.5 El movimiento circular uniforme genera una aceleración centrípeta $\vec{a}_c$, cuya componente horizontal $\vec{a}_x$ es la aceleración de la partícula.

puntos de desplazamiento máximo del punto Q, cuando la velocidad es cero, se producen las aceleraciones máximas.

Si relacionamos la ecuación 8.3 con la (8.9), podemos obtener la siguiente expresión para la aceleración del movimiento armónico simple:

$$a_x = -\omega^2 x \quad (8.10)$$

Como podemos observar en esta ecuación, a_x es independiente del tiempo y es proporcional al desplazamiento del punto Q.



Al igual que en el caso para el desplazamiento y la velocidad, podemos graficar, según la relación (8.10), la aceleración en función del ángulo $\theta = \omega t$, dándole a θ los valores: $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$. La fig. 8.6 muestra la gráfica de la aceleración.

Es importante mencionar que en la deducción de las ecuaciones del desplazamiento, la velocidad y la aceleración, se consideraba que el ángulo inicial del movimiento era igual a cero. Cuando no es así, las mencionadas ecuaciones adoptan las formas señaladas a continuación, donde al ángulo ϕ se le conoce como *ángulo de fase*:

$$x = A \cos(\omega t + \phi) \quad (8.11)$$

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (8.12)$$

$$a = -A\omega^2 \cos(\omega t + \phi) \quad (8.13)$$

Ejemplo 8.1

Una partícula se mueve en una trayectoria circular con un radio de 10 cm y da una vuelta completa en 4 s. Escribe las expresiones para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la partícula para cualquier instante de tiempo y determina los valores máximos de esas expresiones. El movimiento se comienza a observar cuando $\theta = 0$.

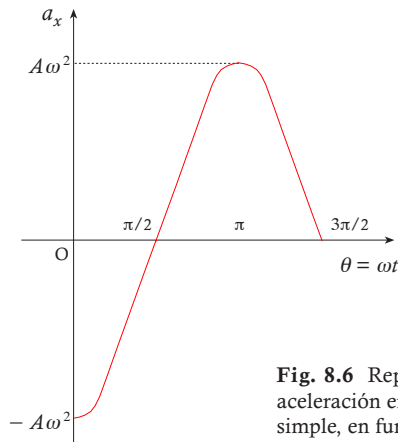


Fig. 8.6 Representación gráfica de la aceleración en el movimiento armónico simple, en función del tiempo.

Solución

Usaremos las relaciones (8.11), (8.12) y (8.13) con $\theta = 0$. Como $T = 4$ s, el valor de ω , de acuerdo con (8.4), es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{4 \text{ s}} = 0,5\pi \text{ rad/s}$$

Como el valor de A se corresponde con el del radio (10 cm = 0,1 m), las expresiones para el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de la partícula son:

$$x = A \cos \frac{2\pi}{T} t = 0,1 \cos \frac{2\pi}{4} t = 0,1 \cos(0,5\pi t) \text{ m}$$

$$\begin{aligned} v &= -\omega A \sin \frac{2\pi}{T} t = -0,5\pi \cdot 0,1 \sin \frac{2\pi}{4} t = \\ &= 0,05\pi \sin(0,5\pi t) \text{ m/s} = 0,16 \sin(0,5\pi t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= -A\omega^2 \cos \frac{2\pi}{T} t = -0,1 \cdot 0,25 \cdot \pi^2 \cos \frac{2\pi}{4} t = \\ &= 0,25 \cos(0,5\pi t) \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

Los valores máximos de x , v y a tienen lugar cuando $\cos(0,5\pi t)$ y $\sin(0,5\pi t)$ son iguales a 1, en cuyo caso tendremos:

$$x = 0,1 \text{ m} \quad v = -0,16 \text{ m/s} \quad a = -0,25 \text{ m/s}^2$$

Ejemplo 8.2

Un objeto se mueve con movimiento armónico simple con una amplitud de 20 cm y un período de 1 s. Determina el valor de la velocidad, cuando se producen los desplazamientos mínimo y máximo.

Solución

La velocidad angular, ω , se calcula mediante la relación:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ s}} = 2\pi \text{ rad/s}$$

El valor de la velocidad para cualquier instante está dada por:

$$v = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

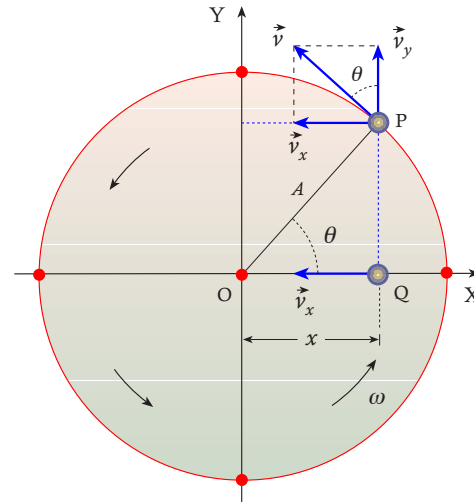


Fig. 8.7 Gráfica para la determinación de la velocidad en función de la elongación.

Como $\omega t + \phi = \theta$, tendremos:

$$v = -\omega A \sin \theta$$

De la fig. 8.7 podemos observar que:

$$\sin \theta = \frac{PQ}{OP}$$

Pero $OP = A$ y $PQ = \sqrt{A^2 - OQ^2} = \sqrt{A^2 - x^2}$. Sustituyendo en la relación anterior:

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A}$$

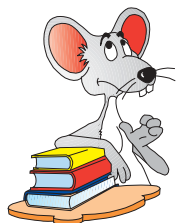
Entonces, la velocidad puede expresarse de la manera siguiente:

$$v_x = -\omega A \frac{\sqrt{A^2 - x^2}}{A} = -\omega \sqrt{A^2 - x^2}$$

El desplazamiento mínimo tiene lugar cuando $x = 0$. Como $A = 0,20$ m, se tiene:

$$v = -2\pi \cdot \sqrt{0,20^2 - 0^2} = -2\pi \cdot 0,20 = -0,40\pi \text{ m/s}$$

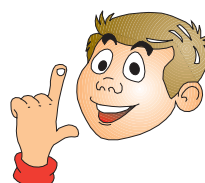
El desplazamiento máximo ocurre cuando $x = A$, valor para el cual $v_x = 0$.



PIENSA Y EXPLICA



- 8.1** ¿Cómo definirías un movimiento armónico simple. Da ejemplos de este tipo de movimiento.
- 8.2** Se afirma en la sección 8.1 que un movimiento puede ser oscilatorio, pero no necesariamente es armónico. ¿Puedes explicar esto y dar ejemplos?
- 8.3** Explica los conceptos de período, frecuencia y ciclo. ¿Cuál es la relación entre frecuencia y período?
- 8.4** Deduce la ecuación del desplazamiento o elongación en el movimiento armónico simple. Define amplitud para este movimiento.
- 8.5** ¿Bajo qué condiciones una pelota, dejada caer desde una cierta altura sobre una superficie, puede dar origen a un movimiento armónico simple?
- 8.6** ¿Qué significa el signo negativo en la velocidad y la aceleración en el movimiento armónico simple?
- 8.7** Investiga qué es el ángulo de fase y la fase en el movimiento armónico simple.
- 8.8** Demuestra que en el movimiento armónico simple la aceleración a_x puede expresarse como $a_x = -\omega^2 x$.
- 8.9** ¿Por qué se dice que el movimiento circular es un movimiento armónico simple? El movimiento de un péndulo se cita, a menudo, como un típico ejemplo de un movimiento armónico simple. Explica por qué.
- 8.10** Representa en un mismo gráfico el desplazamiento, la velocidad y la aceleración de una partícula con movimiento armónico simple. Explica la diferencia entre las curvas dibujadas.

**PROBLEMAS**

8.1 Una partícula se desplaza con movimiento armónico simple con una frecuencia de 2 Hz y una amplitud de 0,25 m. Determina: **a)** El tiempo que tarda la partícula en completar un ciclo completo. **b)** La velocidad y la aceleración de la partícula, cuando se encuentra a una distancia de 10 cm del punto de referencia.

8.2 Una partícula se desplaza siguiendo una trayectoria circular según la expresión $x = 2 \cos(5t + 1)$. Si la distancia al centro del círculo está expresada en m y el ángulo en radianes, determina: **a)** La amplitud, la frecuencia, la velocidad angular, y el ángulo de fase de la partícula. **b)** El valor de la elongación transcurridos $t = 4$ s y $t = 10$ s **c)** Las expresiones generales de la velocidad y la aceleración en función del tiempo. **d)** Los valores de la velocidad y la aceleración cuando $t = 5$ s.

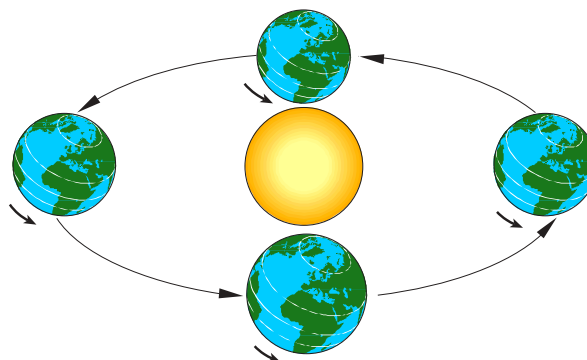
8.3 Un objeto se mueve con movimiento armónico simple, con un período de 2 s alrededor de un punto de referencia, que puede ser tomado como $x = 0$. Cuando $t = 0$, la velocidad es nula y la elongación es igual a 0,10 m. **a)** Determina la frecuencia, la velocidad angular y la amplitud del movimiento. **b)** Escribe las ecuaciones de la velocidad y de la aceleración en función del tiempo. **c)** ¿Cuáles son los valores de la elongación, la velocidad y la aceleración cuando $t = 10$ s?

8.4 La aceleración de un objeto que se mueve con movimiento armónico simple es de -2 m/s^2 , cuando la elongación es de 0,5 m. Determina la frecuencia de oscilación, la velocidad y la aceleración para $t = 1$ s.

8.5 Un resorte oscila alrededor de un punto de equilibrio con una frecuencia de 20 Hz y amplitud de 10 mm. **a)** Determina la fase cuando el desplazamiento es de 5 mm. **b)** Escribe las ecuaciones de la elongación, la velocidad y la aceleración en función del tiempo.

CAPÍTULO 9

Las Interacciones en Física



9.1 SISTEMAS FÍSICOS. INTERACCIONES.

Un *sistema físico* es un conjunto limitado de dos o más cuerpos, entre los cuales se manifiestan acciones físicas mutuas, tales como acciones de empuje de un cuerpo sobre otro, acciones de atracción entre los cuerpos, como ocurre por ejemplo entre el Sol y la Tierra, acciones de atracción o repulsión entre partículas con carga eléctrica, etc. Las acciones mencionadas, también se ponen de manifiesto entre diversos sistemas.

*Se entiende por **interacción** en la Física, al efecto de la acción recíproca entre elementos de un sistema individual, o entre dos o más sistemas, con el resultado de que siempre ocurre una modificación del comportamiento de los elementos interactuantes del sistema o de los elementos interactuantes en diversos sistemas.*

Por ejemplo, la Tierra y la Luna, consideradas como un sistema, interactúan mutuamente, siendo el resultado de esta interacción el de mantener la órbita regular de la Luna alrededor de la Tierra. Nuestro conocido sistema solar, constituido por el Sol, los planetas con sus satélites y asteroides, interactúa como un todo con los demás sistemas de estrellas de la Vía Láctea, originando relaciones de movimiento estables en esa galaxia.

A nivel de la vida cotidiana todos los objetos, cuerpos o cosas que conocemos pueden interactuar, según sea el caso. Cuando un automóvil inicia un movimiento, cada una de sus cuatro ruedas interactúan en forma recíproca con el asfalto de la carretera. Esta acción recíproca se manifiesta porque

al girar las ruedas por la acción del motor del auto, este giro empuja hacia atrás el asfalto; pero, también, el asfalto empuja hacia adelante las ruedas, provocando el avance del automóvil. Cuando abrimos el grifo de un lavamanos, nuestra mano interactúa con el pomo del grifo y el resultado es lograr que el agua fluya libremente.

A nivel de la ciencia en general, el concepto de interacción se ha hecho medular. Todos los fenómenos, por ejemplo de la Química, son interacciones entre moléculas y entre átomos. La Física es una ciencia fundamentalmente de interacciones que van, desde las que ocurren en el micromundo de las partículas elementales como el electrón y el protón, pasando por nuestro mundo, el hogar común del hombre, hasta el macromundo, hogar de las estrellas, galaxias y meta-galaxias.

Este panorama de las interacciones es verdaderamente inmenso y, en la escala natural del hombre o escala humana, correspondiente a 10^0 (1 m), existe la mayor interacción entre el hombre y las cosas a su alrededor y entre las mismas cosas. Todas las interacciones entre nosotros y las cosas que nos rodean las percibimos directamente por nuestros cinco sentidos: el olfato, el tacto, el gusto, la vista y el oído, mediante una combinación de estos sentidos y, también, mediante instrumentos adecuados. Por nuestros sentidos percibimos, entre otras, interacciones con la luz, la lluvia, el calor, el viento, el crecimiento de animales y árboles, el correr de las aguas, el mar, automóviles, aviones. Por intermedio de instrumentos como los telescopios y satélites artificiales podemos percibir interacciones en el macromundo con planetas, estrellas y galaxias

y, a nivel del micromundo, mediante microscopios electrónicos y otros instrumentos, como los aceleradores de partículas subatómicas, entre estos el conocido con el nombre de *ciclotrón*, podemos interactuar con moléculas, átomos, electrones y otras partículas subatómicas.

A pesar de la inmensa variedad de interacciones físicas que ocurren en la naturaleza, todas pueden ser explicadas por medio de cuatro *interacciones fundamentales*. Estas interacciones son las siguientes:

9.1.1. La interacción gravitacional: Esta interacción produce una fuerza de atracción mutua entre todos los cuerpos o partículas que tienen la propiedad de tener masa. En la vida cotidiana, experimentamos su acción, cada momento, cuando vemos que cualquier cosa cae al suelo al soltarla libremente. Nuestro peso tiene su origen en esta interacción, la cual nos mantiene unidos a nuestro planeta y por su acción giramos con la Tierra alrededor del Sol y éste alrededor de la Vía Láctea. Esta acción se extiende a todos los cuerpos del Universo; es decir, que la acción de la interacción gravitacional abarca al infinito.

La magnitud de la interacción gravitatoria nos parece muy grande, lo cual se pone en evidencia cuando, por ejemplo, dejamos caer algo de nuestras manos. La razón estriba en que la interacción se lleva a efecto entre un cuerpo muy grande, la Tierra, y el objeto que dejamos caer. La masa de la Tierra es tan grande que, aunque el objeto sea muy pequeño, produce una interacción con suficiente intensidad como para llevar hacia el suelo tal objeto.

Si comparamos la magnitud de la interacción gravitatoria con la interacción electromagnética, que describimos a continuación, nos daremos cuenta que la primera es muy débil en relación con la segunda, como puede comprobarse si consideramos que la fuerza de atracción gravitatoria entre un protón y un electrón en un átomo de hidrógeno, por ejemplo, es de 10^{-47} newtons, mientras que la fuerza de atracción electrostática entre ambas partículas es de 10^7 newtons. En general, la interacción gravitatoria es la más débil de las cuatro interacciones de la naturaleza.

9.1.2 La interacción electromagnética: Esta interacción se manifiesta en los cuerpos que tienen carga eléctrica o, dicho en otras palabras, los cuerpos eléctricamente cargados. La carga eléctrica, de la cual casi todos hemos oído hablar por lo menos una vez, se presenta en dos formas: *positiva* y *negativa*. Entre estos dos tipos iguales de carga, la interacción que se produce entre ellas es siempre una *fuerza de atracción*. En cambio, entre los mismos tipos de cargas, bien sean positivas o negativas, la interacción es de *repulsión*.

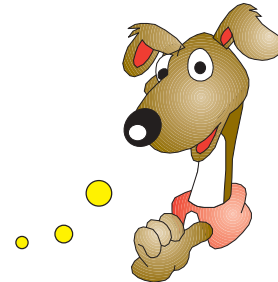
Las cargas positivas están representadas por las partículas subatómicas llamadas *protones* y las cargas negativas por las partículas subatómicas denominadas *electrones*. Existen en el núcleo del átomo partículas que no tienen carga eléctrica: estos son los *neutrones*.

La interacción electromagnética es la base fundamental del actual desarrollo tecnológico de la humanidad: computadoras, televisores, refrigeradores y muchos otros bienes son el producto de las interacciones electromagnéticas. En la vida cotidiana, por ejemplo, evidenciamos la interacción electromagnética cuando encendemos el televisor, pues las imágenes que vemos en la pantalla son el resultado de la interacción de cargas eléctricas. Las señales de radio se originan, también, en fenómenos electromagnéticos. De igual manera, evidenciamos interacciones electromagnéticas en épocas de tormentas atmosféricas, cuando se producen los rayos.

Al nivel del micromundo, la interacción entre electrones y protones es lo que permite la existencia de los átomos, pues ella mantiene unido el núcleo, conformado fundamentalmente por protones, con los electrones que se mueven en órbitas a su alrededor; igualmente, la interacción electromagnética permite la unión de átomos para formar moléculas, de las cuales están constituidos los cuerpos.

Fuerzas como las de fricción entre los cuerpos, las de contacto y de tensión y otras, como las fuerzas elásticas, que se manifiestan cuando estiramos un resorte, son el producto de interacciones electromagnéticas. Todas las sensaciones que experimentamos mediante nuestros sentidos, como el dolor, el frío y el calor son producto de interacciones electromagnéticas, transmitidas a través de las fibras nerviosas de nuestro organismo.

Piensa lo que ocurriría si, de repente, dejaran de existir las cargas eléctricas y, por tanto, las interacciones electromagnéticas entre ellas. En este caso se desintegrarían todos los aparatos contruidos por el hombre, no existirían los átomos, las fuerzas entre los cuerpos desaparecerían en el acto y la vida habría dejado de existir. La interacción electromagnética, lo mismo que la gravitatoria, es de alcance infinito.



9.1.3 La interacción fuerte: Es la que mantiene unido el núcleo del átomo. Esta fuerza es muy grande, pues mantiene la estabilidad de los núcleos atómicos. No obstante estar estos contruidos, principalmente, por protones, partículas con carga eléctrica positiva, sin la acción de esta interacción fuerte, las mismas se repelerían, no permitiendo la estabilidad del núcleo y, por ende, de la materia y de las cosas, tanto inertes como vivas, las cuales conforman nuestro mundo y el Universo. La acción de la interacción fuerte tiene lugar a muy corta distancia, del orden de 10^{-15} m.

9.1.4 La interacción débil: Es la responsable de la conversión y desintegración de partículas subatómicas. Por ejemplo, en el Sol el elemento Hidrógeno se transforma en Helio, a través de la conversión, primero, de dos protones en un núcleo de Deuterio, generando con esto grandes cantidades de energía. También, la interacción débil está asociada con las desintegraciones radioactivas de núcleos de elementos químicos, como el Radio, el Torio y el Uranio.

La tabla 9.1 muestra una comparación de las cuatro interacciones fundamentales en relación a sus

específicos campos de acción, su alcance e intensidad relativa, con respecto a la interacción fuerte.

9.2 LA FUERZA COMO MEDIDA DE LAS INTERACCIONES

En la vida corriente la palabra fuerza tiene muchos significados; por ejemplo, es muy común oír la expresión "fuerza de la voluntad", así como también expresiones del tipo: "fuerza del viento", "fuerza de la razón", "fuerza del deseo", "a fuerza de", "fuerzas de la naturaleza", "fuerzas morales". También, todos tenemos un concepto intuitivo de fuerza; es decir, un pensamiento que, sin ningún tipo de razonamiento, nos lleva a expresar que la fuerza se manifiesta como la acción de empujar o de halar algo, lo cual nos conduce a asociar la fuerza con el movimiento de las cosas o, más concretamente, con cierto cambio en el estado del movimiento de las cosas. Por ejemplo, cuando empujamos un carro que se ha parado porque se le acabó la gasolina, estamos ejerciendo una fuerza; en este caso, una fuerza muscular. El resultado de esta acción puede tener dos efectos, que mencionamos a continuación:

INTERACCIONES FUNDAMENTALES DE LA NATURALEZA				
	Gravitacional	Electromagnética	Fuerte	Débil
Campos de Interacción	Mantiene en órbitas regulares el movimiento de planetas, estrellas y galaxias.	Mantiene la unión del núcleo - electrones en el átomo.	Responsable de la estabilidad del núcleo atómico.	Regula la desintegración de núcleos atómicos.
Alcance	Infinito	Infinito	10^{-15} m	10^{-17} m
Intensidad Relativa	10^{-39}	10^{-2}	1	10^{-6}

Tabla 9.1 Comparación de las interacciones fundamentales en la naturaleza.

1. El carro se mueve. En este caso, el efecto de las fuerzas aplicadas ha sido cambiar el estado de movimiento del carro; éste inicia su movimiento desde el reposo, con velocidad cero, y va cambiando su velocidad a cada instante. Por muy pequeños que sean estos cambios de velocidad, son en realidad cambios. Por lo tanto, de acuerdo con lo que aprendimos en Cinemática, el carro se mueve con un movimiento acelerado, con aceleración positiva al comienzo y, luego, con aceleración negativa, cuando se deja de aplicar la fuerza exterior, quedando actuando sólo la fuerza de roce de los cauchos con el pavimento, hasta detenerse.

2. El carro no se mueve, aun aplicándole las fuerzas que intentan moverlo. El carro no se pone en movimiento debido a que la fuerza resultante entre la fuerza de roce del asfalto sobre los cauchos y las fuerzas aplicadas, que tratan de moverlo, es cero. Por lo tanto, al no moverse, la aceleración también será cero.

En Cinemática, hemos aprendido, también, que si un cuerpo se mueve con velocidad constante y en línea recta, realiza un movimiento no acelerado, puesto que su velocidad no cambia con el tiempo. Al no estar acelerado, al cuerpo no se le está aplicando ninguna fuerza y, como consecuencia, podemos decir que este cuerpo no está interactuando con otro cuerpo. Por otra parte, si al cuerpo se le están aplicando simultáneamente un conjunto de fuerzas, puede ocurrir que la resultante de la acción de tales fuerzas sea cero, en cuyo caso la aceleración será cero y el cuerpo, o bien se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme, o bien permanece en estado de reposo; es decir, no se mueve. Para caracterizar esta condición del movimiento de los cuerpos, bien sea con velocidad constante o en estado de reposo, se dice, entonces, que los mismos se encuentran en *estado de equilibrio*.

Desde el punto de vista de la Física, el concepto de fuerza está íntimamente relacionado al concepto de interacción y tal relación se expresa diciendo que la fuerza es la medida de la interacción entre cuerpos o partículas de un sistema o interacciones entre sistemas.

Para concluir esta descripción de la fuerza, como una medida de las interacciones entre los cuerpos, diremos que, cuando se aplica una fuerza a un cuerpo, la misma, además de modificar su estado de movimiento, puede producir una deformación del mismo, la cual podría ser permanente si la fuerza

aplicada es lo suficientemente grande o ser temporal si la fuerza aplicada es pequeña. Por ejemplo, si golpeamos un pedazo de latón con un martillo, la deformación será permanente; en cambio, si nos sentamos sobre un colchón la deformación desaparece al levantarnos del mismo. En Física se estudian estos efectos, que ocurren debido a la acción de diferentes clases de fuerza que existen en la naturaleza. La descripción de tales fuerzas y efectos serán tratados en secciones subsiguientes.

9.3 EL CARÁCTER VECTORIAL DE LA FUERZA

Cuando a un cuerpo se le aplica una fuerza, éste se mueve con movimiento acelerado, pero dado que la fuerza tiene un valor expresado por un número o módulo y la misma se aplica siempre en una dirección definida, nos percatamos, de inmediato, que puede ser descrita matemáticamente como una cantidad vectorial. La experiencia indica que, efectivamente, *la fuerza es un vector*, pues cumple con la ley de la adición vectorial, condición necesaria y suficiente para que una magnitud con módulo y dirección pueda ser considerada como un vector.

Establecido, pues, el carácter vectorial de la fuerza, pasamos a estudiar la manera de cómo cuantificar o medir las fuerzas aplicadas a un cuerpo. Esto se puede lograr utilizando la deformación de un resorte. Para iniciar el proceso, se toma un resorte y se fija su extremo superior como se muestra en la fig.9.1(a)

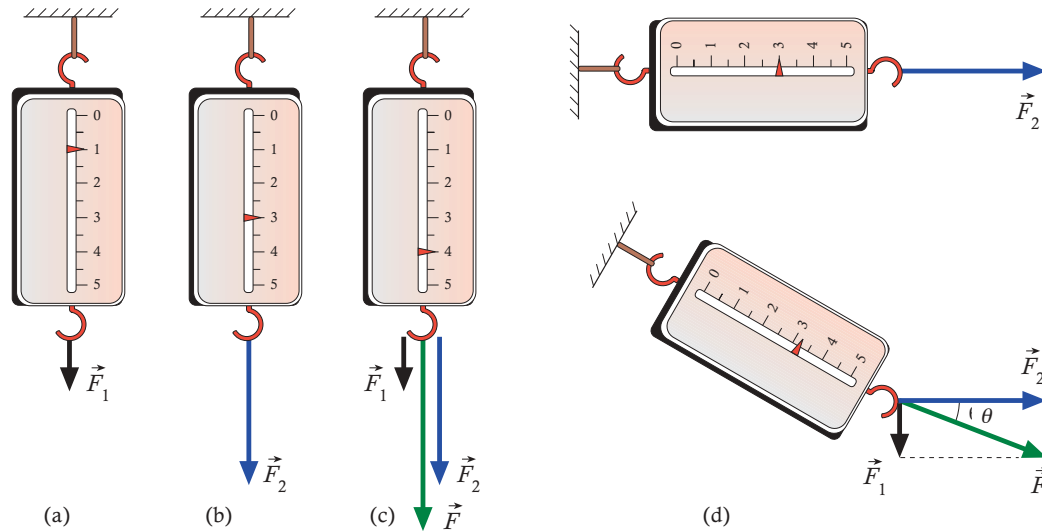


Fig. 9.1 a) El vector fuerza $\vec{F}_1$ alarga el resorte 1 cm. b) El vector fuerza $\vec{F}_2$, de magnitud 3 veces el vector unitario alarga el resorte 3 cm. c) La aplicación simultánea de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ sobre el resorte, lo estirará 4 cm. Este resultado demuestra el carácter vectorial de la fuerza. d) Si se aplica la fuerza $\vec{F}_1$ verticalmente y la fuerza $\vec{F}_2$ horizontalmente en forma simultánea, el resorte alcanzará 3,16 cm.

y se procede, luego, a su calibración para que pueda ser utilizado como patrón de medida de fuerzas. El procedimiento a seguir es el siguiente:

Se define una fuerza unitaria (de valor 1 unidad), $\vec{F}_1$, como la fuerza que, al ser aplicada sobre el resorte, lo alarga 1 cm, tal como se muestra en la fig. 9.1(a). Si en lugar de $\vec{F}_1$, aplicamos una fuerza, $\vec{F}_2$, en la misma dirección que la anterior, pero de magnitud 3 unidades, el resorte se alargará 3 cm, como se muestra en la fig. 9.1(b). Ahora bien, si sobre el mismo resorte aplicamos simultáneamente las 2 fuerzas anteriores, el efecto será alargar el resorte 4 cm. Esto, mostrado en la fig. 9.1(c), es equivalente a sumar los efectos individuales de cada fuerza. Este resultado demuestra el carácter vectorial de la fuerza, ya que cumple con el requisito de que los vectores se pueden sumar. Si ahora aplicamos las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ en forma simultánea, pero con $\vec{F}_1$ dirigida hacia abajo y $\vec{F}_2$ dirigida horizontalmente, como se muestra en la fig. 9.1(d), se observa que el resorte se alargará 3,16 cm. Si aplicamos el

cálculo para obtener la suma vectorial de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ de la fig. 9.1(d), el resultado demostrará que la fuerza resultante, $\vec{F}$, tendrá un módulo con el mismo valor del alargamiento producido experimentalmente al aplicar realmente las dos fuerzas. Esto es,

$$|\vec{F}| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{1 + 9} = 3,16 \text{ cm}$$

La dirección de $\vec{F}$ será, de acuerdo con la fig. 9.1(d):

$$\theta = -\tan^{-1} \frac{1}{3} = -\tan^{-1}(0,33) = -19^\circ$$

El cálculo de este ángulo, que mide la dirección de la fuerza, es una demostración adicional del carácter vectorial de la fuerza.

9.4 FUERZAS: COMPOSICIÓN Y DESCOMPOSICIÓN

En la sección anterior, hemos sumado vectorialmente las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ para obtener la fuerza resultante $\vec{F}$ con su magnitud o módulo y su dirección. Este proceso de operar con dos o más fuerzas para obtener una

fuerza que realice la misma acción, se llama combinación o composición de fuerzas.

En el análisis de la composición o descomposición de fuerzas, es conveniente conocer que toda fuerza tiene asociada su denominada *línea de acción* o *directriz*, como también se le conoce, la cual es una línea paralela a la fuerza, que pasa por su punto de aplicación, señalando su dirección.

También es importante saber que el efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido no se altera en modo alguno, si trasladamos su punto de aplicación a cualquier punto del cuerpo, siempre que el punto se mantenga en línea con la misma dirección de la fuerza aplicada. Esto último se comprende claramente si se observa la fig. 9.2, que muestra una nevera a ser trasladada de un punto a otro de la cocina. El movimiento de la nevera se puede lograr aplicando una fuerza adecuada, $\vec{F}$, en el punto A. Supongamos que durante el movimiento aplicamos en el punto B, en la misma dirección de $\vec{F}$, las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ iguales y contrarias e iguales también, en módulo, a

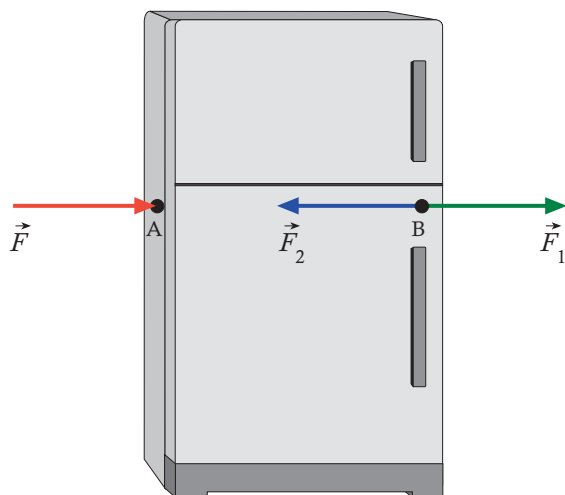


Fig. 9.2 La nevera se mueve al aplicar la fuerza $\vec{F}$ en el punto A. Si, simultáneamente, se aplican en el punto B las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, del mismo módulo de $\vec{F}$, pero de sentido opuesto, las fuerzas $\vec{F}$ y $\vec{F}_2$ se cancelan, quedando actuando sólo $\vec{F}_1$, lo que es igual que si hubiésemos trasladado $\vec{F}$ del punto A al punto B, sin afectar el movimiento de la nevera.

$\vec{F}$. La aplicación de las fuerzas iguales y opuestas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ no alteran el estado de movimiento de la nevera. De la figura, podemos ver que $\vec{F}$ y $\vec{F}_2$ por ser iguales y opuestas se cancelan y queda actuando únicamente la fuerza $\vec{F}_1$ en el punto B. Esta fuerza, por ser igual a $\vec{F}$, hace que sea equivalente trasladar la aplicación de $\vec{F}$ del punto A al punto B para mover la nevera, sin que se altere su movimiento.

9.4.1 Fuerzas aplicadas en un punto común y dirigidas en una misma dirección

Si sobre un cuerpo rígido actúan simultáneamente varias fuerzas con la misma dirección y aplicadas sobre un punto común, la fuerza neta resultante es la suma vectorial de todas las fuerzas aplicadas en ese punto común. Si las fuerzas aplicadas son $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$, podemos escribir, entonces:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 \quad (9.1)$$

Ejemplo 9.1

A la lancha mostrada en la fig. 9.3, se le apagó el motor antes de tocar la orilla y es halada hacia ésta mediante una cuerda colocada en el centro de la proa por 2 hombres, uno de los cuales aplica una fuerza de 400 unidades y el otro una fuerza de 450 unidades. Calcular la fuerza neta ejercida sobre la lancha.

Solución

La fig. 9.3 muestra la dirección de las fuerzas aplicadas en un punto sobre la quilla de la lancha. La resultante $\vec{F}$ estará aplicada sobre el mismo punto de las componentes y es del mismo sentido. Sumando los módulos de las dos fuerzas aplicadas:

$$|\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| = 400 + 450 = 850 \text{ unidades}$$

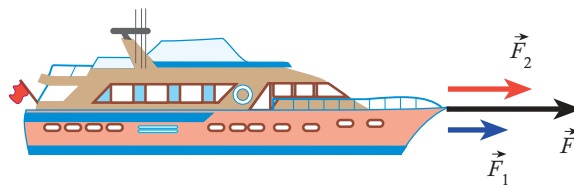


Fig. 9.3 Ejemplo 9.1. ¿Qué fuerza neta se aplica a la lancha?

La fuerza resultante neta sobre el bote es:

$$\vec{F} = 850 \text{ unidades (dirección: } 0^\circ \text{ con la horizontal)}$$

9.4.2 Fuerzas aplicadas en un punto común y con sentidos contrarios

Si se tiene una o varias fuerzas aplicadas en un punto común, pero dirigidas en sentido contrario, se procede determinando la resultante del grupo que actúa en una dirección y; luego, se halla la resultante del grupo que actúa en la otra dirección y, finalmente, se resta el valor mayor del menor y este valor será el resultado de la acción del conjunto de fuerzas sobre el cuerpo.

9.4.3 Fuerzas concurrentes en un punto común y con distintas direcciones

Si se tienen sólo dos fuerzas, cuyos puntos de aplicación concurren a un punto común O, formando entre sí un ángulo ϕ , la resultante se obtiene calculando la diagonal del paralelogramo constituido por los segmentos de las fuerzas concurrentes, tal como se muestra en la fig. 9.4. El cálculo de la diagonal se realiza aplicando la ley del coseno:

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 - 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos\phi} \quad (9.2)$$

O también:

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\phi} \quad (9.3)$$

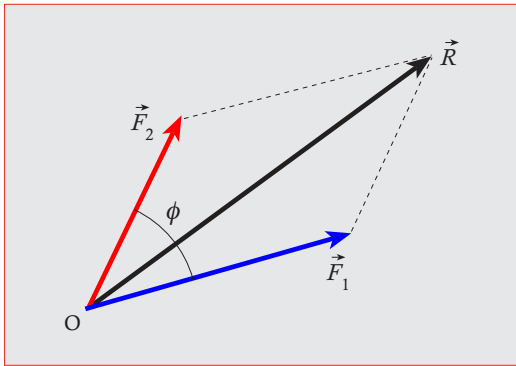


Fig. 9.4 Las fuerzas aplicadas en el punto O, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, pueden ser reemplazadas por la resultante $\vec{R}$, diagonal del paralelogramo formado por los segmentos de longitud igual al de las fuerzas.

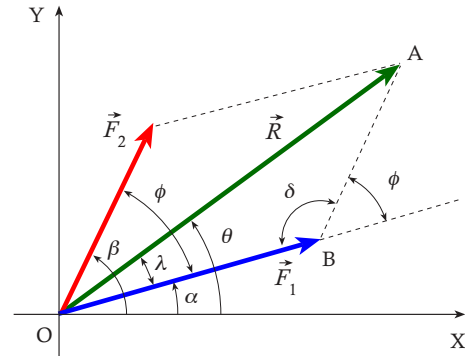


Fig. 9.5 $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son vectores con direcciones α y β , respectivamente. ϕ es el ángulo entre $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ y θ corresponde al ángulo que determina la dirección de la fuerza resultante, $\vec{R}$. El cálculo del ángulo θ se hace aplicando la ley del seno.

Para calcular la dirección o ángulo de $\vec{R}$, en relación con la horizontal, al diagrama vectorial se le asocia un sistema de coordenadas rectangulares, como se muestra en la fig.9.5, con el fin de facilitar la aplicación de la ley del seno para calcular dicha dirección. Hay que tener en cuenta, además, que cada fuerza aplicada puede ser expresada vectorialmente como:

$$\vec{F}_1 = (F_1, \alpha) \quad \vec{F}_2 = (F_2, \beta)$$

Donde F_1 y F_2 son los módulos de las fuerzas aplicadas y α y β son los ángulos que los vectores que representan a dichas fuerzas forman con el eje horizontal. Si suponemos conocidos el ángulo ϕ entre los vectores $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, podemos utilizar la ley del seno para determinar el ángulo que el vector que representa a la fuerza resultante forma con el eje X. Como el ángulo ϕ es conocido, el ángulo δ estará dado por:

$$\delta = 180^\circ - \phi \quad (9.4)$$

Aplicando la ley del seno, de la trigonometría plana, se tiene:

$$\frac{\sin\delta}{R} = \frac{\sin\lambda}{F_2} \Rightarrow \lambda = \sin^{-1}\left(\frac{F_2}{R}\sin\delta\right) \quad (9.5)$$

Obtenido el ángulo λ , podemos calcular el ángulo θ , que establece la dirección de $\vec{R}$. Se tiene, entonces, de la fig. 9.5:

$$\theta = \alpha + \lambda \quad (9.6)$$

Es importante señalar que el cálculo de la fuerza resultante puede hacerse fácilmente realizando una suma analítica de vectores. Para usar este procedimiento es necesario expresar los vectores representativos de las fuerzas, mediante sus componentes rectangulares para efectuar, luego, la suma vectorial de los mismos. Para el caso que nos ocupa y refiriéndonos a la fig. 9.5, podemos escribir:

$$\vec{F}_1 = (F_1, \alpha) = F_1 \cos \alpha \vec{i} + F_1 \operatorname{sen} \alpha \vec{j} \quad (9.7)$$

$$\vec{F}_2 = (F_2, \beta) = F_2 \cos \beta \vec{i} + F_2 \operatorname{sen} \beta \vec{j}$$

La fuerza resultante está dada por:

$$\begin{aligned} \vec{R} &= (F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \beta) \vec{i} + (F_1 \operatorname{sen} \alpha + F_2 \operatorname{sen} \beta) \vec{j} = \\ &= R_x \vec{i} + R_y \vec{j} \end{aligned} \quad (9.8)$$

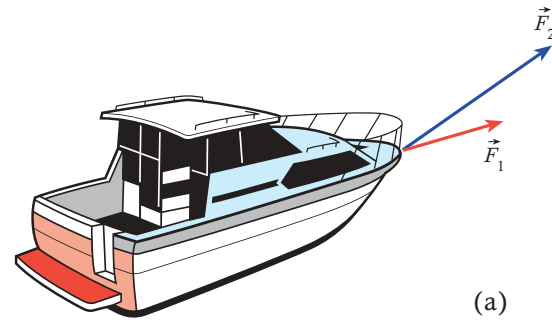
donde R_x y R_y son las componentes del vector $\vec{R}$ según los ejes X y Y, respectivamente. El módulo y ángulo de la fuerza resultante están dados por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \quad (9.9)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left(\frac{R_y}{R_x} \right) \quad (9.10)$$

Ejemplo 9.2

Supongamos que queremos lanzar al mar una lancha que está sobre su trailer, cerca de la orilla. Si mediante dos cuerdas aplicadas en un punto común en la quilla, como se muestra en la figura 9.6(a), dos grupos de hombres halan una cuerda aplicando una fuerza neta de 75 unidades en la dirección 30° , al norte del este, y otro grupo de hombres halan la otra cuerda aplicando en total una fuerza de 120 unidades en dirección 63° , también al norte del este, determina la magnitud y dirección de la fuerza aplicada en el mismo punto de la lancha, por un grupo de hombres halando en una sola dirección y la cual sea equivalente a sustituir las fuerzas aplicadas por los grupos de hombres anteriores.



(a)

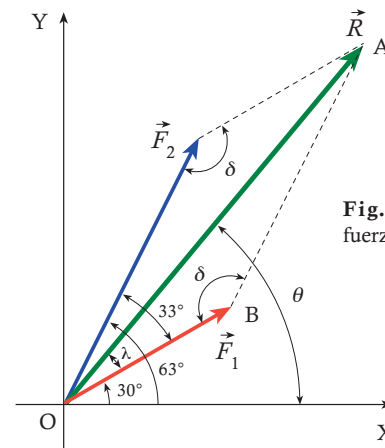


Fig. 9.6 Diagrama de fuerzas para el ejemplo 9.2

(b)

Solución

Asociaremos un sistema de coordenadas rectangulares para ubicar las direcciones y magnitudes de las fuerzas ejercidas por cada grupo de hombres. Luego, aplicaremos el teorema del coseno y del seno para hallar la magnitud y dirección de la fuerza resultante.

La figura 9.6 muestra la magnitud y dirección de las fuerzas concurrentes, aplicadas por los dos grupos de hombres y la dirección de la fuerza que sustituye la acción de dichas fuerzas. El ángulo entre las dos fuerzas aplicadas es de $63^\circ - 30^\circ = 33^\circ$. El ángulo en el vértice A del paralelogramo es, también, de 33° . Dado que la suma de los ángulos internos de un paralelogramo es de 360° , para obtener el ángulo, δ , en el vértice B, usamos la siguiente ecuación:

$$2\delta + 66^\circ = 360^\circ$$

de la cual obtenemos, $\delta = 147^\circ$. Aplicando el ley del coseno se tiene:

$$R = \sqrt{R_1^2 + R_2^2 - 2R_1R_2 \cos \phi} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{75^2 + 120^2 - 2 \cdot 75 \cdot 120 \cos 147^\circ} = \\
 &= \sqrt{5.625 + 14.400 - 18.000 \cdot \cos 147^\circ} = \\
 &= \sqrt{35.121,07} = 187,41 \text{ unidades}
 \end{aligned}$$

Para hallar el ángulo de dirección de $\vec{R}$, previamente calculamos el ángulo λ , entre $\vec{F}_1$ y $\vec{R}$, aplicando la ley del seno:

$$\begin{aligned}
 \lambda &= \sin^{-1}\left(\frac{F_2}{R} \sin \delta\right) = \sin^{-1}\left(\frac{120}{187,47} \sin 147^\circ\right) = \\
 &= \sin^{-1}(0,35) = 20,40^\circ
 \end{aligned}$$

Aplicando la relación (9.6) se obtiene el valor del ángulo de dirección de $\vec{R}$:

$$\theta = 20,41^\circ + 30^\circ = 50,41^\circ$$

Luego, el vector $\vec{R}$ puede expresarse como:

$$\vec{R} = (187,41; 50,41^\circ)$$

$$\vec{R} = 187,41 \text{ unidades a } 50,41^\circ \text{ al norte del este.}$$

El ejemplo anterior puede resolverse sumando analíticamente los vectores. Estos pueden ser expresados de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_1 &= (75, 30^\circ) = 75 \cos 30^\circ \vec{i} + 75 \sin 30^\circ \vec{j} = \\
 &= 64,95 \vec{i} + 37,50 \vec{j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_2 &= (120, 63^\circ) = 120 \cos 63^\circ \vec{i} + 120 \sin 63^\circ \vec{j} = \\
 &= 54,48 \vec{i} + 106,92 \vec{j}
 \end{aligned}$$

La fuerza resultante es:

$$\begin{aligned}
 \vec{R} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 64,95 \vec{i} + 37,50 \vec{j} + 54,48 \vec{i} + 106,92 \vec{j} = \\
 &= 119,43 \vec{i} + 144,42 \vec{j}
 \end{aligned}$$

El módulo y dirección de esta fuerza son:

$$\begin{aligned}
 R &= \sqrt{119,43^2 + 144,42^2} = \sqrt{14.263,52 + 20.857,14} = \\
 &= \sqrt{35.120,66} = 187,41 \text{ unidades} \\
 \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{144,42}{119,43}\right) = 50,41^\circ
 \end{aligned}$$

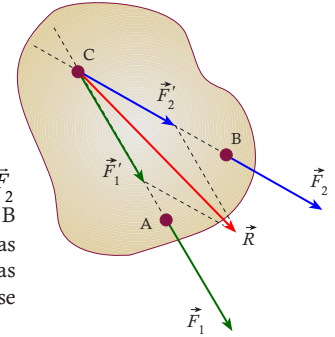


Fig. 9.7 Las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ aplicadas en los puntos A y B son fuerzas no paralelas. Las líneas de acción de las fuerzas se cortan en C y, desde allí, se calcula la resultante $\vec{R}$.

Las fuerzas concurrentes sobre un cuerpo no siempre se ven a simple vista aplicadas sobre un punto común. Ocurre con frecuencia que los puntos de aplicación de las fuerzas están separados por una determinada distancia. Sin embargo, si las direcciones de las fuerzas no son paralelas, las líneas de acción de estas fuerzas se encontrarán en un punto. Si trasladamos los puntos de aplicación de las fuerzas a este punto, se puede calcular la resultante de dichas fuerzas. La fig. 9.7 muestra las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ aplicadas en los puntos A y B. Prolongando sus líneas de acción, las mismas se cortarán en el punto C. El punto de aplicación de las fuerzas se puede trasladar a C y, desde allí, hallar la resultante aplicando la ley del coseno, tal como se ha explicado antes. Si se trata de varias fuerzas concurrentes, es conveniente obtener la resultante sumando vectorialmente los vectores que actúan.

Cuando se tienen más de dos fuerzas concurrentes aplicadas en un punto, las cuales pueden estar dirigidas sobre un plano o en el espacio, se puede hallar una resultante, procediendo, primero, a combinar dos de ellas; luego, esta resultante se combina con la siguiente fuerza y se obtiene otra resultante y así hasta combinar la última fuerza con la última resultante obtenida.

9.4.4 Fuerzas paralelas y de igual sentido aplicadas en puntos diferentes de un cuerpo

Cuando dos fuerzas paralelas y del mismo sentido, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, se aplican en puntos diferentes de un cuerpo, las mismas pueden ser reemplazadas por una única fuerza $\vec{R}$, de igual sentido, cuya magnitud es el resultado de sumar vectorialmente las dos fuerzas y cuyo punto de aplicación es el punto de corte de $\vec{R}$.

o, de su línea de acción, con cualquier recta que intersecte a los respectivos puntos de aplicación, A y C, de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ o también a sus líneas de acción. El punto de corte es tal que divide a esta recta en dos segmentos, cuya relación entre ellos es inversamente proporcional a la relación F_1/F_2 .

La fig. 9.8(a) muestra el cuerpo M sobre el cual se aplican las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ y la resultante $\vec{R}$ aplicada en el punto B. La fig. 9.8(b) es un diagrama para demostrar que la relación inversa mencionada siempre se cumple, cualquiera que sea el punto de aplicación de $\vec{R}$ en su línea de acción. Refiriéndose a la fig. 9.8(b), si en los puntos de aplicación, A y C, de las fuerzas, $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, se aplican las fuerzas $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$ de magnitud igual, pero dirigidas en sentido opuesto, se obtiene un sistema igual, desde el punto de vista de la acción de las fuerzas presentes, pues el resultado de la acción de las fuerzas no se altera.

Ahora bien, si se componen las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_3$ con las fuerzas $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_4$ se obtienen las resultantes $\vec{R}_1$ y $\vec{R}_2$. Si los puntos de aplicación de estas resultantes se trasladan, según sus líneas de acción, se encontrarán en un punto D, como se muestra en la fig. 9.8(b). En este punto tales fuerzas se indican como $\vec{R}'_1 = \vec{R}_1$ y $\vec{R}'_2 = \vec{R}_2$. Tenemos, entonces, un sistema de fuerzas concurrentes en el punto D. Si descomponemos estas fuerzas en sus componentes rectangulares, podemos ver, según la figura, que las com-

ponentes $\vec{F}_5$ y $\vec{F}_6$ son dos fuerzas iguales y paralelas a $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$, pero por ser de sentido opuesto se anulan, quedando solamente las componentes $\vec{R}'$ y $\vec{R}''$ que son paralelas e iguales a $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, respectivamente, y están en la línea de acción de $\vec{R}$. La suma $\vec{R}' + \vec{R}'' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{R}$. Por lo tanto, se demuestra, en primer lugar, que el punto de aplicación de $\vec{R}$ puede estar en cualquier punto de su línea de acción dentro de los límites del cuerpo donde está actuando.

Pasaremos, ahora, a demostrar la relación inversa entre F_1/F_2 y los segmentos en que divide el punto de aplicación de $\vec{R}$ a la recta secante, trazada entre los puntos de aplicación de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

De acuerdo con la figura 9.8(b), los triángulos BCD y FCE son semejantes, por lo que podemos escribir:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{FE}{FC}$$

Como $FE = F_4$ y $FC = F_2$, tendremos:

$$\frac{BC}{BD} = \frac{F_4}{F_2}$$

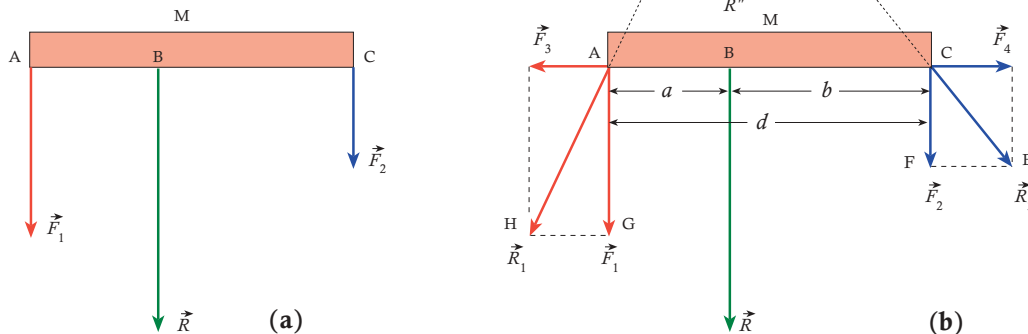


Fig. 9.8 a) La acción de las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ aplicadas sobre un objeto, puede ser reemplazada por la acción de la fuerza $\vec{R}$, resultante de sumar vectorialmente dichas fuerzas. b) Procedimiento para determinar la línea de acción de $\vec{R}$.

De los triángulos semejantes ABD y HGA y dado que $HG = F_3$ y $GA = F_1$, se tiene:

$$\frac{AB}{BD} = \frac{HG}{GA} \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{F_3}{F_1}$$

Dividiendo miembro a miembro las relaciones anteriores y puesto que $F_3 = F_4$:

$$\frac{BC}{AB} = \frac{F_4 / F_2}{F_3 / F_1} \Rightarrow \frac{BC}{AB} = \frac{F_1}{F_2}$$

Si hacemos $AB = a$, $BC = b$ y $AC = d$, podemos escribir:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{b}{a} \quad (9.11)$$

Si sumamos la unidad a cada miembro de la ecuación (9.10) y teniendo en cuenta que:

$$F_1 + F_2 = R \quad a + b = d$$

se tiene:

$$\frac{F_1}{F_2} + 1 = \frac{b}{a} + 1 \Rightarrow \frac{F_1 + F_2}{F_2} = \frac{d}{a} \quad (9.12)$$

Los segmentos a y b pueden obtenerse de la relación (9.12):

$$a = \frac{F_2}{F_1 + F_2} d \quad (9.13) \quad b = \frac{F_1}{F_1 + F_2} d \quad (9.14)$$

Cuando se trate de más de 2 fuerzas actuando en paralelo sobre un objeto, se puede seguir el mismo procedimiento para calcular el punto de aplicación de la resultante de dichas fuerzas. Se requiere simplemente medir las separaciones entre los puntos de aplicación de dos de las fuerzas y se procede a calcular el punto de ubicación de su resultante. Luego, se procede a calcular la ubicación del punto de aplicación de esta resultante con la siguiente fuerza, y así sucesivamente, hasta llegar a la última fuerza.

Ejemplo 9.3

Una cocina es empujada por una pareja al sitio escogido para su ubicación permanente, como se muestra en la fig. 9.9(a). La fuerza aplicada por el hombre es de 350 unidades y la fuerza aplicada por la mujer es de 200 unidades. Determina: **a)** La fuerza total aplicada sobre la cocina. **b)** Si la distancia entre los puntos de aplicación de $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ es de 0,70 m, determina la línea de acción de la resultante $\vec{R}$ y su punto de aplicación.

Solución

a) La fig. 9.9(b) muestra las direcciones de las fuerzas aplicadas a la cocina. Dichas fuerzas son paralelas y pueden ser sustituidas por una sola fuerza, que es la resultante de sumar los módulos de las mismas. La fuerza total aplicada sobre la cocina es:

$$R = F_1 + F_2 = 350 + 200 = 550 \text{ unidades}$$

En forma vectorial, podemos escribir:

$$\vec{R} = 550 \text{ unidades a } 0^\circ \text{ con la horizontal} = (550, 0^\circ)$$

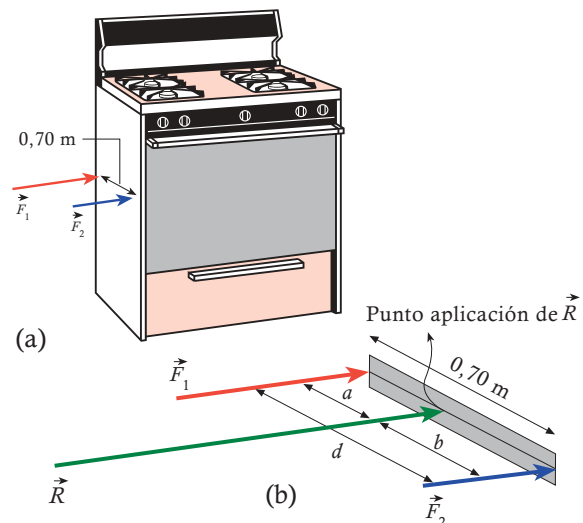


Fig. 9.9 a) Sobre la cocina se aplican fuerzas $\vec{F}_1$ de magnitud 350 unidades y $\vec{F}_2$ de magnitud 200 unidades, ambas en la misma dirección. La acción de las dos fuerzas es equivalente a aplicar una sola fuerza, $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. La línea de acción de la resultante se determina, según se ha explicado en el texto.

b) La línea de acción y punto de aplicación de $\vec{R}$ se puede obtener mediante la relación (9.13):

$$a = \frac{F_2}{F_1 + F_2} d = \frac{200}{550} \cdot 0,70 = 0,25 \text{ m}$$

Este resultado nos indica que la línea de acción de $\vec{R}$ se encuentra a 0,25 m de la línea de acción de $\vec{F}_1$ y el punto de aplicación es el punto señalado en la figura 9.9(b). Observa que la fuerza resultante, $\vec{R}$, tiene su punto de aplicación más cerca a la fuerza $\vec{F}_1$, por ser la mayor de las fuerzas aplicadas.

9.4.5 Fuerzas paralelas y de sentidos contrarios aplicadas en puntos diferentes

Cuando se tienen fuerzas paralelas desiguales aplicadas sobre un cuerpo, pero dirigidas en direcciones opuestas, la fuerza neta resultante será la diferencia vectorial entre las fuerzas aplicadas. En este sistema de fuerzas, en forma semejante al caso de las fuerzas paralelas dirigidas en el mismo sentido, se cumple, según la figura 9.10, que la línea de acción de la resultante $\vec{R}$ corta a una línea secante de las dos componentes en el punto B, de tal manera que la relación entre las dos fuerzas F_1/F_2 es inversamente proporcional a la relación de los segmentos de recta BC/AB , esto es:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AB}$$

Si hacemos, en forma similar al caso anterior, $AC = d$, $BC = b$ y $AB = a$, se tiene:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{b}{a} \quad (9.15)$$

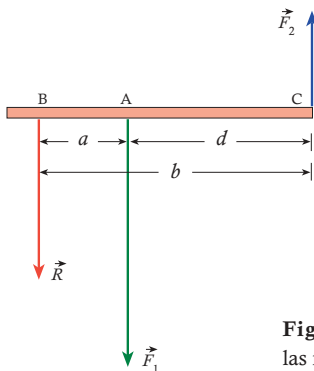


Fig. 9.10 La diferencia entre las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ es $\vec{R}$.

Si restamos la unidad a cada miembro de la ecuación (9.15) y se despeja a y b , se obtienen las siguientes expresiones:

$$a = \frac{F_2}{F_1 - F_2} d$$

(9.16)

$$b = \frac{F_1}{F_1 - F_2} d$$

(9.17)

Ejemplo 9.4

Un automóvil se detuvo por falta de combustible y se requiere moverlo de inmediato a un sitio cercano, por cuestiones de seguridad en la vía. Como se muestra en la fig. 9.11(a), un hombre empuja el auto aplicándole una fuerza de módulo 450 unidades. El contacto de los cauchos con el asfalto genera una fuerza de roce de 250 unidades en sentido contrario, que se opone al movimiento. a) ¿Cuál es la fuerza neta resultante que permite que el auto se mueva? b) Si la distancia entre los puntos de aplicación de las dos fuerzas es de 0,90 m, calcula las distancias entre el punto de aplicación de la resultante y la fuerza aplicada por la persona que empuja el auto c) ¿Cuál es la distancia entre el punto de aplicación de la resultante y el punto de aplicación de la fuerza de roce?

Solución

La fig. 9.11(a) muestra la dirección de las dos fuerzas aplicadas sobre el automóvil, que son paralelas, pero dirigidas en sentido contrario. Ambas fuerzas pueden ser, teóricamente, sustituidas por una sola fuerza, cuyo módulo será la resultante de restar los módulos de estas dos fuerzas. En la fig.11(b) se muestra el diagrama de fuerzas aplicadas, la distancia entre los puntos de aplicación de las dos fuerzas y las distancias, a y b , a calcular.

a) Restando los módulos de las dos fuerzas aplicadas, se obtiene:

$$F_h - F_r = 450 - 300 = 150 \text{ unidades}$$

Vectorialmente, la fuerza neta resultante se puede expresar como:

$$\vec{R} = 150 \text{ unidades a } 0^\circ \text{ sobre la horizontal} = (150, 0^\circ)$$

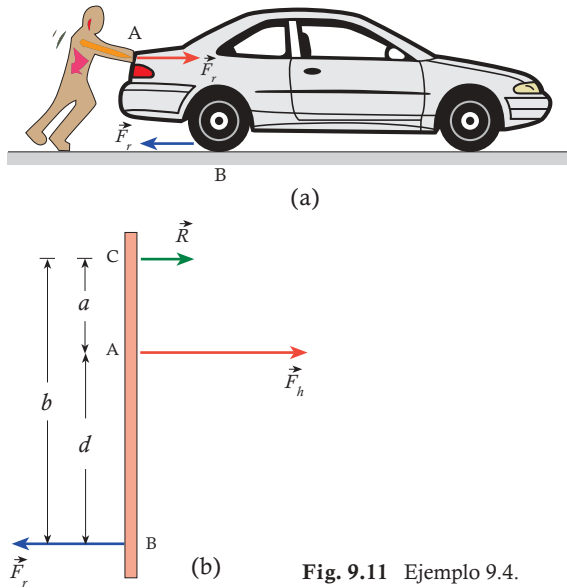


Fig. 9.11 Ejemplo 9.4.

b) La distancia a , entre $\vec{R}$ y $\vec{F}_h$, se calcula aplicando la relación (9.16):

$$a = \frac{F_r}{F_h - F_r} d = \frac{250}{450 - 250} \cdot 0,90 = 1,13 \text{ m}$$

c) La distancia b , entre $\vec{R}$ y $\vec{F}_r$, se calcula mediante la relación (9.17):

$$b = \frac{F_h}{F_h - F_r} d = \frac{450}{450 - 250} \cdot 0,90 = 2,03 \text{ m}$$

9.4.6 Descomposición de fuerzas

La descomposición de fuerzas es el caso inverso de la combinación de fuerzas. Es decir, si tenemos una fuerza aplicada a un cuerpo, podemos considerar que esta fuerza es la resultante de la aplicación de 2 o más fuerzas que, en este caso, se denominan *fuerzas componentes*. Las direcciones de estas componentes pueden ser muy variadas, dependiendo del ángulo que exista entre ellas. Uno de los casos más sencillos, es la descomposición de una fuerza en 2 componentes, conocidas las direcciones de las mismas. En este caso se trata, simplemente, de construir el paralelogramo, cuya diagonal es la fuerza $\vec{F}$, que queremos descomponer, y cuyos lados son las fuerzas componentes $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

La fig. 9.12 muestra la fuerza $\vec{F}$ aplicada en el punto A; también se muestran la línea de acción AB de $\vec{F}_1$ y la línea de acción AC de $\vec{F}_2$. Para determinar con exactitud las magnitudes de las componentes, procedemos como sigue: se traza una paralela a la línea de acción AB por la punta de la flecha de $\vec{F}$, hasta cortar la línea de acción AC en $\vec{F}_2$. En forma similar, trazamos una paralela a AC hasta que corte a AB en $\vec{F}_1$. De este modo quedan determinadas las componentes $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

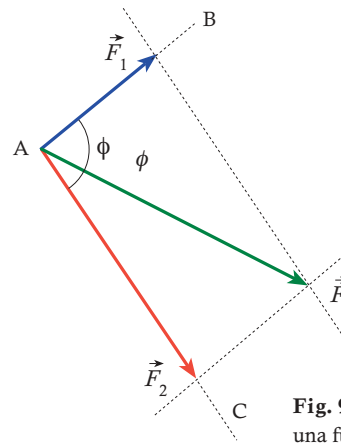


Fig. 9.12 Descomposición de una fuerza en 2 componentes.

Si queremos descomponer una fuerza en más de dos componentes, se procede según la fig. 9.13, donde se muestra, con su dirección, la fuerza $\vec{F}$ que se quiere descomponer en 4 componentes, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ y $\vec{F}_4$. Para comprobar que $\vec{F}$ es efectivamente la resultante de estas componentes, se procede a trazar una poligonal, cuyos lados sean paralelos e iguales respectivamente a cada una de las fuerzas componentes, iniciando dicha poligonal en el punto de aplicación de $\vec{F}$ y terminando en la punta de su flecha.

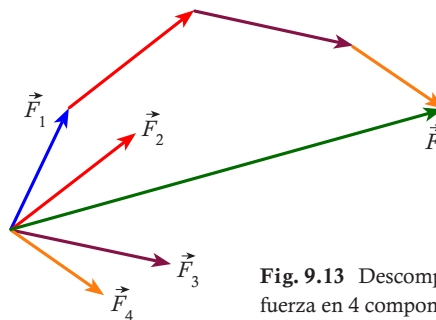


Fig. 9.13 Descomposición de una fuerza en 4 componentes.

El uso del método analítico, mediante el cual cada fuerza es expresada mediante sus componentes rectangulares, es utilizado con frecuencia para la descomposición de una fuerza, tal como se plantea en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 9.5

Una lancha es halada desde la orilla hacia el mar por dos hombres, mediante dos cuerdas amarradas, una a cada lado de la quilla, como se muestra en la fig. 9.14(a). Uno de los hombres aplica una fuerza de magnitud 500 unidades, con un ángulo de 60° sobre la horizontal, y el hombre del lado derecho aplica una fuerza de magnitud 350 unidades, con un ángulo de 15° sobre la horizontal. Determina el valor de la magnitud y el ángulo de la fuerza resultante, $\vec{F}$.

Solución

La fig. 9.14(b) muestra las direcciones de las fuerzas aplicadas sobre la lancha. En un sistema de coordenadas como el mostrado, la fuerza $\vec{F}_1$ está en dirección a 60° al norte del este y la fuerza $\vec{F}_2$ está en dirección 15° al norte del este. Procederemos a descomponer a las dos fuerzas en sus componentes rectangulares. Para la fuerza $\vec{F}_1$, se tiene:

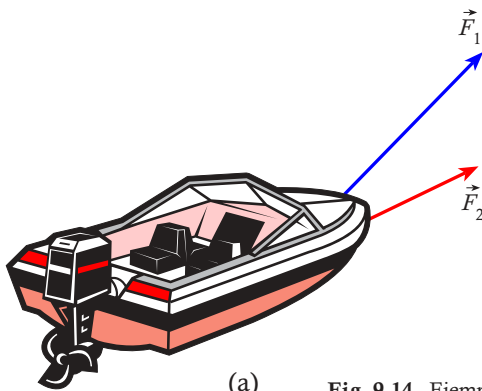
$$F_{1x} = 500 \cos 60^\circ = 500 \cdot 0,500 = 250 \text{ unidades}$$

$$F_{1y} = 500 \sin 60^\circ = 500 \cdot 0,866 = 433 \text{ unidades}$$

Para la fuerza $\vec{F}_2$ se tiene:

$$F_{2x} = 350 \cos 15^\circ = 350 \cdot 0,966 = 338,10 \text{ unidades}$$

$$F_{2y} = 350 \sin 15^\circ = 350 \cdot 0,259 = 90,65 \text{ unidades}$$



(a)

Fig. 9.14 Ejemplo 9.5

La componente neta horizontal será:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x} = 250 + 338,10 = 588,10 \text{ unidades}$$

La componente neta vertical será:

$$F_y = F_{1y} + F_{2y} = 433 + 90,65 = 523,65 \text{ unidades}$$

El módulo de la fuerza resultante es:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{588,10^2 + 523,65^2} = 787,45 \text{ unid.}$$

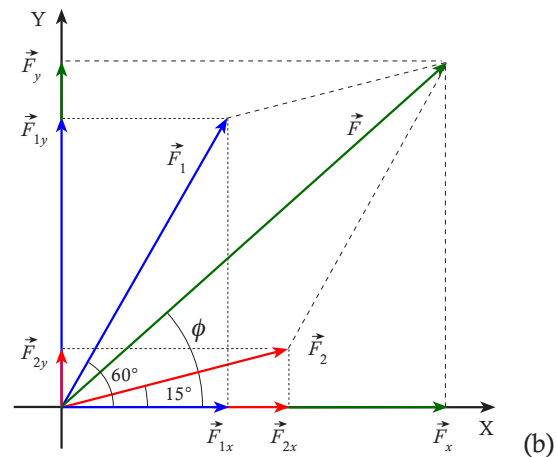
El ángulo de dirección de la fuerza resultante, respecto a la horizontal es:

$$\tan \phi = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \phi = \tan^{-1} \left(\frac{523,65}{588,10} \right) = 41,68^\circ$$

9.5 CLASES DE FUERZAS

Desde el punto de vista de la Física, en la naturaleza se identifican dos grupos de fuerzas denominadas *fuerzas de contacto* y *fuerzas de campo*. En el primer grupo se encuentran las fuerzas que son *producto de la interacción directa entre dos cuerpos*; es decir, se originan cuando ocurre un contacto físico entre dos cuerpos. Por ejemplo, cuando se golpea con el pie un balón de fútbol, éste se pone en movimiento, como resultado de la interacción del pie con el cuerpo del balón.

Se pueden mencionar muchos ejemplos de fuerzas de este tipo, que se manifiestan en la vida diaria: cuando empujamos una caja venciendo la fuerza de



(b)

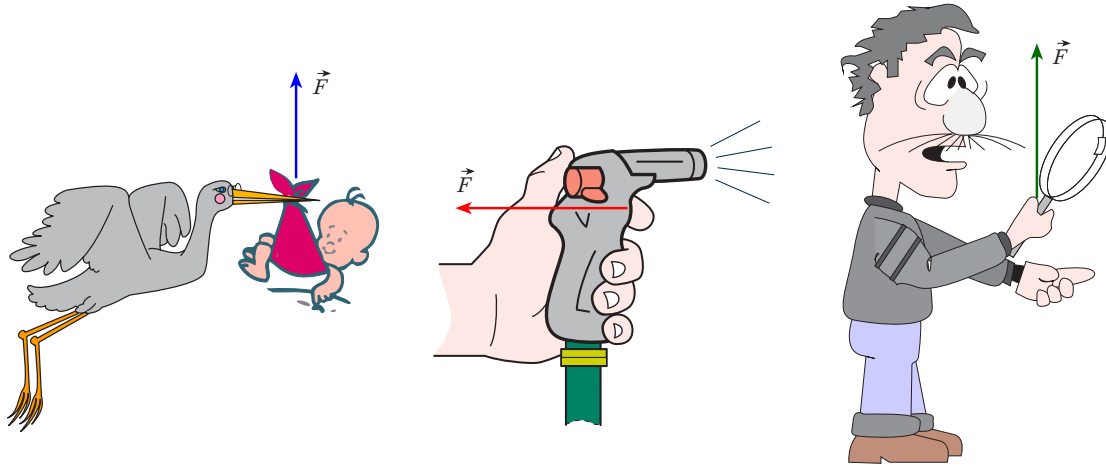


Fig. 9.15 Fuerzas de contacto.

roce entre el piso y la superficie deslizante de la caja, cuando halamos un carro para ubicarlo en sitio seguro al lado de la acera. La fig. 9.15 muestra varios ejemplos de este tipo de fuerzas de contacto.

Existen en la naturaleza otro conjunto de fuerzas que, aparentemente, no son el resultado del contacto físico entre dos cuerpos, ya que la interacción se realiza a través del espacio. Este tipo de fuerzas se denominan *fuerzas de campo*. La fuerza de atracción gravitacional entre dos cuerpos es un ejemplo claro de este tipo de fuerzas. En nuestro mundo, la Tierra, la fuerza gravitacional hace que todos los cuerpos caigan en dirección al centro de ésta y se mantengan pegados a la misma. Esta fuerza gravitacional, que atrae y mantiene los cuerpos sobre la Tierra, se conoce como *peso* de los cuerpos.

La fuerza de atracción entre dos cargas eléctricas de signos opuestos, lo mismo que la repulsión entre cargas eléctricas del mismo signo, así como la atracción entre polos de signos opuestos de dos imanes, son también ejemplos de fuerzas de campo.

9.6 FUERZAS DE CONTACTO

Las fuerzas de contacto han sido estudiadas por la Física en toda la historia de su desarrollo y las mismas se clasifican, como se describe a continuación:

9.6.1 Fuerza elástica

El concepto de fuerza elástica surge de la propiedad de *elasticidad*, o recuperación de la forma original

que tienen los cuerpos en la naturaleza, luego que los mismos han sufrido una deformación, debido a la interacción con otros cuerpos. La manifestación de esta propiedad de recuperación depende de la naturaleza del material que constituye el cuerpo, de la magnitud de la fuerza aplicada o, en otras palabras, del grado de interacción entre los cuerpos. Cuando la naturaleza del material es tal que el cuerpo no recupera su forma original, se dice que el cuerpo es *inelástico* y, en general, los materiales que responden a esta condición se denominan *materiales plásticos*. Como ejemplo de cuerpos inelásticos podemos mencionar, dentro de una gran variedad, la arcilla húmeda, el plomo, la plastilina y la goma de mascar.

Los *cuerpos elásticos* son aquellos que recuperan su forma luego de haber sido sometidos a una interacción con otros cuerpos. En relación con los cuerpos elásticos, el físico británico Robert Hooke, que nació y vivió en la época de Newton, fue el primero que estudió la deformación de los cuerpos elásticos cuando se les aplica una fuerza. Comúnmente, se utiliza el resorte o muelle para la realización de los estudios de la elasticidad, ya que permite visualizar, en forma sencilla, las deformaciones de alargamiento o de compresión, como se muestra en la fig. 9.16. El estudio realizado por Hook reveló que cuando se aplica una fuerza a un cuerpo, bien sea de estiramiento o de compresión, el desplazamiento es directamente proporcional a la fuerza aplicada; esto es,

$$F_k = -k x \quad (9.18)$$

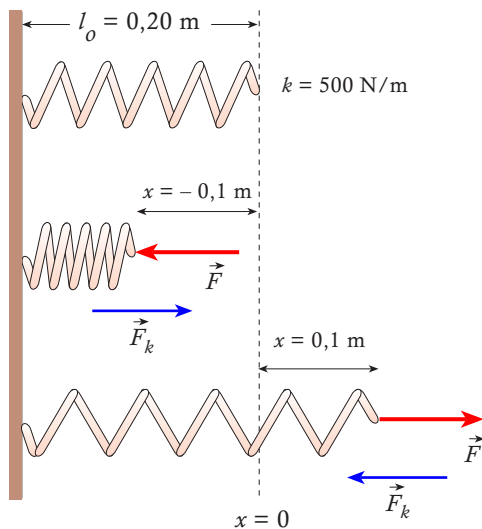


Fig. 9.16 Elongación de un resorte sometido a fuerzas de compresión o de alargamiento.

donde k se denomina constante del resorte y la misma depende del material del cual está construido; x es el desplazamiento o elongación del resorte desde su posición de equilibrio o posición natural. El signo negativo indica que la fuerza elástica del resorte se opone a su estiramiento o a su compresión; es decir, esta fuerza tiende a restituir la posición de equilibrio del resorte, y la dirección de la misma se ejercerá siempre a lo largo del resorte. A la relación matemática descrita antes, entre la fuerza de un resorte y su elongación o su compresión, es decir, $F_k = -kx$, se conoce como la *ley de Hooke*.

En la fig. 9.16 la longitud del resorte, de constante $k = 500 \text{ N/m}$, cuando no está sometido a fuerza alguna es $l_o = 0,20 \text{ m}$. Cuando se aplica una fuerza de compresión, la distancia medida con respecto a la posición original es $x = -0,10 \text{ m}$. En este caso, la fuerza necesaria para producir la deformación es:

$$F_k = -500 \text{ N/m} \cdot (-0,10 \text{ m}) = 50 \text{ N} \Rightarrow \vec{F} = -50\vec{i} \text{ N}$$

Cuando la fuerza es de alargamiento, para la fig. 9.16 se tiene:

$$F_k = -500 \text{ N/m} \cdot (0,10 \text{ m}) = -50 \text{ N} \Rightarrow \vec{F} = 50\vec{i} \text{ N}$$

Es importante aclarar que existe un límite para la compresión o la elongación de un resorte, más allá del cual el mismo mantendrá una deformación

permanente. El punto, después del cual la deformación se hace permanente, se conoce como *límite elástico*.

9.6.2 Fuerza de tensión

Es una fuerza de contacto, también de tipo elástico, que resulta cuando, con una cuerda se hala un objeto unido a uno de sus extremos. La fuerza se aplica sobre la cuerda y no directamente sobre el objeto. Ahora bien, como la fuerza aplicada a la cuerda tiende a estirla, se le denomina *fuerza de tensión*.

Como sabemos, toda fuerza es un vector y la fuerza de tensión es, por lo tanto, un vector y el mismo actúa a lo largo de la cuerda; su magnitud es un escalar y la misma se llama *tensión*. Normalmente, las cuerdas son muy delgadas, por lo que su masa se desprecia y se considera que la fuerza de tensión aplicada se transmite, con igual intensidad, por todos sus puntos. Si se cortara una cuerda en tensión y se intercalara una balanza de resorte de masa despreciable, la balanza indicaría la magnitud de la fuerza de tensión en ese punto, como se muestra en la figura 9.17.

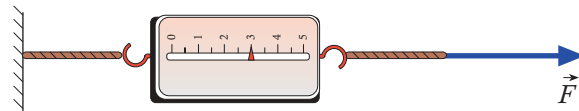


Fig. 9.17 La báscula de resorte, intercalada entre dos puntos de la cuerda, mide la fuerza de tensión en la misma.

9.6.3 Fuerza normal

Es la fuerza elástica ejercida por una superficie sobre la cual está interactuando un objeto que comprime dicha superficie, deformándola. Dicha deformación, en la práctica, es prácticamente imperceptible, debido a la rigidez de los materiales de los cuerpos que normalmente interactúan. La fig. 9.18 muestra un candelabro sobre una mesa. La fuerza elástica, $\vec{F}_n$, ejercida por la superficie de la mesa sobre el candelabro es normal (perpendicular) a la superficie del mismo, causándole también deformación. Por otra parte, los cuerpos sometidos a la deformación tratarán de recuperar su forma inicial, al cesar la interacción entre ambos.

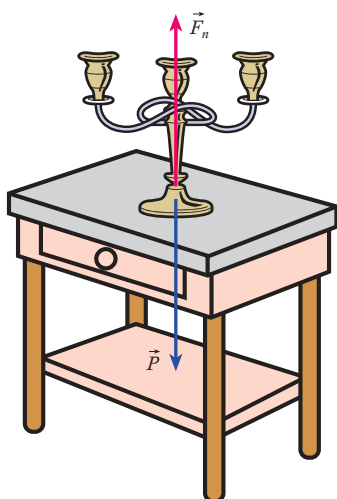


Fig. 9.18 El candelabro ejerce una fuerza $\vec{P}$, sobre la mesa, correspondiente al peso del mismo. La mesa ejerce sobre el candelabro una fuerza normal, $\vec{F}_n$, de la misma magnitud y opuesta a $\vec{P}$.

9.6.4 Fuerza de fricción

Son fuerzas que se oponen al movimiento entre dos cuerpos, cuyas superficies interactúan entre sí. En la vida cotidiana, las fuerzas de fricción tienen importancia capital, ya que si no existieran, sería imposible caminar o correr, pues resbalaríamos al tratar de hacerlo, sin lograr avance alguno. Igualmente, los cauchos de los automóviles patinarían y los mismos no podrían moverse. El auto mismo no podría detenerse al aplicarle los frenos, pues los cauchos deslizarían indefinidamente; tampoco se podría introducir clavos en una madera u otro material, pues no tendrían ningún agarre.

La causa y detalles como se desarrolla la fricción es algo que todavía no es entendido totalmente; sin embargo, en la actualidad se tiene claro que la misma se debe en parte a:

- Las irregularidades que presentan las superficies interactuantes. Esas irregularidades, aun en las superficies más pulidas, pueden presentar picos a nivel microscópico, que van de 10^{-5} hasta 10^{-4} mm. Como esos picos encajan unos en otros cuando interactúan las superficies, aparece una fuerza que se opone al deslizamiento de una superficie sobre la otra.
- La interacción electromagnética entre cargas eléctricas. Es sabido que cuando superficies en contacto deslizan entre sí, se produce un intercambio de cargas eléctricas entre ellas,

generándose una atracción entre ambas superficies que produce la fuerza que se opone al movimiento o, lo que es lo mismo, se genera fuerza de fricción. La interacción electromagnética no es aplicable a todos los casos, pues superficies de un mismo material que deslizan entre sí, no intercambian cargas y, por lo tanto, no generan fuerza de fricción.

La fuerza de fricción sobre superficies secas no lubricadas, que son las que se estudian en este curso, presentan las siguientes características.

- La fuerza de fricción es proporcional a la fuerza normal, ejercida por una superficie sobre un objeto que descansa o deslice sobre ella.
- La fuerza de fricción es independiente del área de contacto.
- La fuerza de fricción es independiente de la velocidad del objeto que desliza sobre una superficie.

Las dos primeras características fueron descubiertas por el sabio italiano Leonardo Da Vinci, en 1508, y la tercera por Amontons, científico francés, en 1699. La primera característica se entiende razonablemente, pues entre mayor sea el peso de la superficie que decansa o desliza sobre otra superficie, la *fuerza de fricción* o *de roce*, como también se le conoce, será proporcionalmente mayor.

La segunda característica no parece tan razonable de buenas a primeras; por lo tanto, requiere una explicación. En este caso, se recurre al concepto de presión mecánica de un cuerpo que descansa sobre otro. Sin entrar en detalles, en este momento, sobre el análisis físico del fenómeno general de la presión, se puede decir que *la presión mecánica se entiende como la relación entre una fuerza y la superficie sobre la cual se aplica*. En símbolos, se expresa así: $P = F/S$, donde P es la presión causada por la fuerza aplicada sobre la superficie, F la fuerza aplicada y S la superficie sobre la cual se aplica F .

Si se analiza la relación mencionada, se puede ver que si S disminuye constantemente, la presión irá

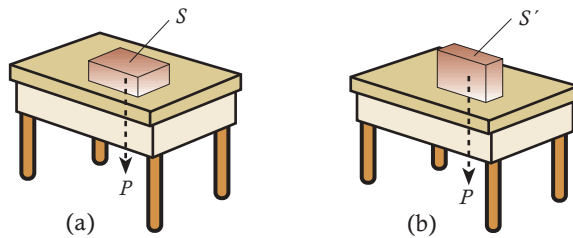


Fig. 9.19 El ladrillo descansa sobre su cara más ancha en la mesa de madera. La presión, P , que el ladrillo ejerce sobre la tabla será: $P = F/S$, donde F es el peso del ladrillo y S la superficie ocupada por la cara en contacto con la mesa. **b)** El mismo ladrillo descansa de canto sobre la tabla la presión es $P' = F/S'$, donde la fuerza F es, de nuevo, el peso del ladrillo y S' es la superficie de canto del mismo. Puesto que el peso permanece igual, y $S > S'$, se deduce que $P < P'$.

aumentando también constantemente y a la inversa: si S aumenta constantemente, P disminuye constantemente. De acuerdo con esto, si se tiene un ladrillo que descansa sobre su lado en una tabla de madera, como se muestra en la figura 9.19(a), la presión que ejerce el ladrillo sobre la tabla tendrá un valor dado por la relación entre la fuerza, en este caso el peso de ladrillo, y la superficie sobre la cual descansa. Si se coloca el ladrillo de canto, el peso del ladrillo sigue siendo idéntico; en cambio, la superficie de contacto es menor; por lo tanto, la presión ejercida por este ladrillo sobre la tabla será mayor en esa área.

Hemos dicho que las superficies, aun las más pulidas, presentan, a nivel microscópico picos o crestas y que cuando se ponen en contacto, las mismas se tocan sólo en estos picos. Por lo tanto, si nos referimos al caso del ladrillo descansando sobre su cara de mayor

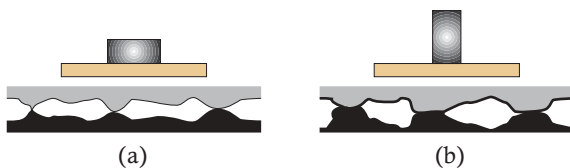


Fig. 9.20 **a)** El ladrillo descansa sobre su cara más ancha en la mesa de madera. El número de puntos de contacto depende de la superficie ofrecida por el ladrillo. **b)** El ladrillo descansa de canto. Los puntos de contacto serán menores que en (a), pero más aplanados debido a la mayor presión. Las superficies de contacto en (a) y (b) resultan iguales y la fuerza de fricción en ambos casos es igual. Es decir, la fuerza de fricción es independiente de la superficie de contacto.

superficie, fig. 9.19 (a), los picos en contacto de ambas superficies se tocarán y aplastarán, como se muestra en la figura 9.20(a). En el segundo caso, los picos de contacto son menores en número, pues la superficie de canto del ladrillo es, por supuesto, menor; pero, debido a que la presión del ladrillo de canto es mayor que en el otro caso, los picos se aplastarán más, como se muestra en la fig. 9.20(b), y el peso del ladrillo que descansa de canto, se distribuirá sobre un área igual al área de los puntos de contacto del ladrillo puesto de plano. Por lo tanto, la fricción, en ambos casos, es la misma.

En otras palabras, la fricción aumenta en el ladrillo que descansa de canto, pues las superficies de contacto de los picos aumentan, al aplanarse más, debido a mayor presión, pero estas superficies se hacen iguales a las superficies de contacto de los picos del primer caso, ya que estos, aun siendo menores en extensión, son mayores en número, como se dijo antes; en consecuencia, las fuerzas de fricción en ambos casos son iguales o, con mucha aproximación, iguales.

Se puede comprobar, entonces, que si se deslizan sobre la tabla, a una determinada velocidad, los ladrillos de plano y de canto, la fuerza necesaria para mantener el movimiento es la misma en ambos casos, lo cual comprueba que la fuerza de fricción es independiente del área de contacto y, por consiguiente, también independiente de la velocidad.

9.7 TIPOS DE FUERZA DE FRICCIÓN

En Física se conocen dos tipos de fuerzas de fricción: la fuerza de *fricción estática* y la fuerza de *fricción cinética* o *fricción dinámica*.

9.7.1 Fuerza de fricción estática

La fig. 9.21 muestra un bloque en reposo sobre una mesa, al cual se le aplica una fuerza horizontal $\vec{F}$, a través de una balanza de resorte. Además, se muestran las otras fuerzas que actúan sobre el bloque, como son su propio peso $\vec{P}$, la fuerza normal $\vec{N}$ y la fuerza de fricción $\vec{F}_f$. Al aplicar la fuerza $\vec{F}$, la balanza indicará su magnitud; sin embargo, al comienzo el bloque no se mueve. Esto quiere decir

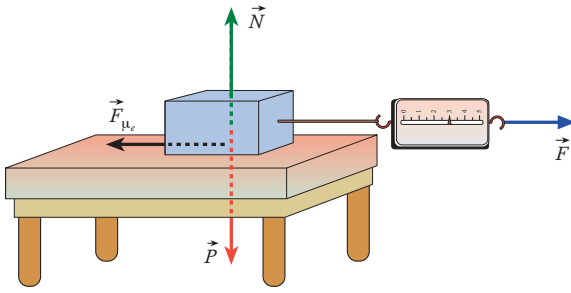


Fig. 9.21 La fuerza de fricción $\vec{F}_{\mu_e}$ se opone a la fuerza, $\vec{F}$, que se aplica al bloque, a través de la balanza de resorte. Mientras el bloque no se mueva, $\vec{F} - \vec{F}_{\mu_e} = 0$. Es decir, $\vec{F} = \vec{F}_{\mu_e}$. Si se sigue aumentando F , hasta hacerla mayor que $(F_{\mu_e})_{\text{máx}}$, el bloque se mueve.

que debe existir una fuerza igual y contraria a $\vec{F}$ que la equilibre. Esta fuerza que equilibra a $\vec{F}$ es la fuerza de fricción estática. Si se aumenta $\vec{F}$ y el bloque no se mueve, es debido a que la fuerza de fricción estática también ha aumentado. Si se continúa aumentando $\vec{F}$, la fuerza de fricción estática también continuará aumentando, manteniendo siempre su magnitud igual a $\vec{F}$. Al continuar aumentando $\vec{F}$, llegará un momento cuando el bloque comienza a moverse. Cuando el bloque está a punto de iniciar el movimiento, $\vec{F}_{\mu_e}$ adquiere su máximo valor o valor límite y cuando $\vec{F}$ supera este valor, la fuerza $\vec{F}_{\mu_e}$ ya no podrá equilibrar a $\vec{F}$; entonces, el bloque comenzará a moverse. El valor límite de $\vec{F}_{\mu_e}$ se denomina fuerza máxima de fricción estática y se representa por $(\vec{F}_{\mu_e})_{\text{máx}}$.

Experimentalmente se ha determinado que $(\vec{F}_{\mu_e})_{\text{máx}}$ es proporcional a la fuerza normal $\vec{N}$. Recordemos que la fuerza normal es la fuerza perpendicular a la superficie sobre la cual descansa un objeto, que actúa sobre el mismo y es igual a la magnitud de la fuerza perpendicular, $\vec{P}$ (peso del objeto), que el objeto ejerce sobre la superficie. En símbolos, $(F_{\mu_e})_{\text{máx}} \propto N$. La constante de proporcionalidad entre las magnitudes de $(\vec{F}_{\mu_e})_{\text{máx}}$ y $\vec{N}$ se denomina *coeficiente de fricción estático* y se representa por μ_e , el cual es un número adimensional, lo que quiere decir que

μ_e es una relación sólo entre los módulos de las fuerzas $(\vec{F}_{\mu_e})_{\text{máx}}$ y $\vec{N}$. El valor de este coeficiente depende de la naturaleza de las superficies en contacto; es decir, depende de los tipos de materiales que entren en contacto (hierro, madera, caucho, porcelana, etc) y del grado de pulitura de las superficies.

De acuerdo a lo señalado anteriormente, la fuerza de fricción estática entre dos superficies paralelas en contacto, se opone a la acción de cualquier fuerza aplicada a una de las superficies y puede tener valores menores o iguales a un valor límite, dado por:

$$F_{\mu_e} \leq \mu_e N \quad (9.19)$$

Cuando el bloque está a punto de iniciar su movimiento por la acción de $\vec{F}$, la ecuación anterior se hace igual cuando $F_{\mu_e} = (F_{\mu_e})_{\text{máx}} = \mu_e N$, mientras que para $F < (F_{\mu_e})_{\text{máx}}$, la desigualdad de la relación (9.19) se mantiene. Observa que la relación (9.19) no es vectorial, sino que establece una conexión entre los módulos de las fuerzas $\vec{F}_{\mu_e}$ y $\vec{N}$.

9.7.2 Fuerza de fricción dinámica

En referencia a la fig. 9.21 anterior, si la magnitud de $\vec{F}$ se hace mayor a la magnitud de $(\vec{F}_{\mu_e})_{\text{máx}}$, el bloque se comienza a mover en la dirección de $\vec{F}$. No obstante, la fuerza de fricción sigue oponiéndose al movimiento del bloque. Esta fuerza de fricción que actúa sobre el bloque oponiéndose al movimiento de éste, se denomina fuerza de fricción dinámica o cinética, F_{μ_d} , y está dada por:

$$F_{\mu_d} = \mu_d N \quad (9.20)$$

donde μ_d es el *coeficiente de fricción dinámica o cinética* entre el bloque y la mesa.

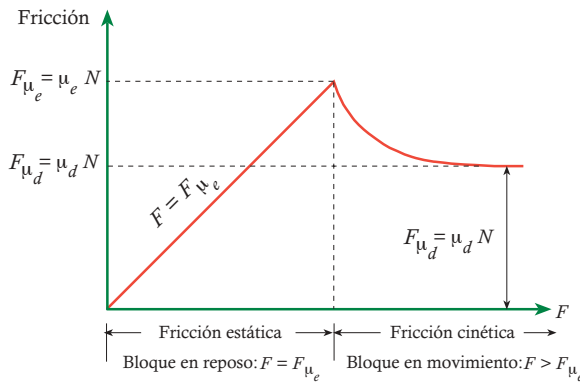


Fig. 9.22 Estando el bloque en reposo, a medida que F crece, $\vec{F}_{\mu_e}$ también crece, hasta alcanzar un valor máximo. El bloque se comienza a mover al hacerse $F > \vec{F}_{\mu_e} N$, momento a partir del cual surge la fricción cinética y $F_{\mu_d} = \mu_d N$.

La dependencia entre la fuerza aplicada a una superficie que descansa sobre otra y las fuerzas de fricción estática y cinética que se generan entre las dos superficies en contacto, se visualiza con claridad en la fig. 9.22. En dicha figura, en el eje de las Y se representan las fuerzas de fricción estática, $\vec{F}_{\mu_e}$, y dinámica, $\vec{F}_{\mu_d}$, y en el eje de las X la fuerza aplicada $\vec{F}$. Como puede verse en la figura, a medida que F aumenta, $\vec{F}_{\mu_e}$ también aumenta y dichas fuerzas se mantienen iguales hasta que $\vec{F}_{\mu_e}$ alcanza su valor crítico $(\vec{F}_{\mu_e})_{\text{máx}}$, para el cual, el bloque inicia su movimiento y, entonces, queda bajo la acción de una fricción cinética.

Los valores de μ_d al igual que para μ_e dependen de la naturaleza de las superficies. En general, el coeficiente de fricción cinética es menor que el coeficiente de fricción estática; por lo tanto, la fuerza de fricción cinética es menor que la fuerza de fricción estática máxima, es decir, $F_{\mu_d} < (F_{\mu_e})_{\text{máx}}$.

Cuando el bloque inicia su movimiento por acción de la fuerza aplicada, $\vec{F}$, dicho movimiento se realizará a velocidad constante si $F = F_{\mu_d}$, pero si $F > F_{\mu_d}$, el movimiento del bloque será acelerado.

Ejemplo 9.6

Una caja de 80 kg está en reposo sobre una superficie plana. El coeficiente estático de fricción entre las superficies de contacto es 0,80. **a)** ¿Cuál es la fuerza horizontal necesaria para mover la caja? **b)** Si la fuerza aplicada forma un ángulo de 30° con la horizontal, ¿cuál debe ser su valor para mover la caja?

Solución

En la fig. 9.23 se presenta el esquema para los casos de la fuerza horizontal y la fuerza inclinada.

a) La fuerza de fricción estática entre las superficies en contacto está dada por (ver fig. 9.23(a):

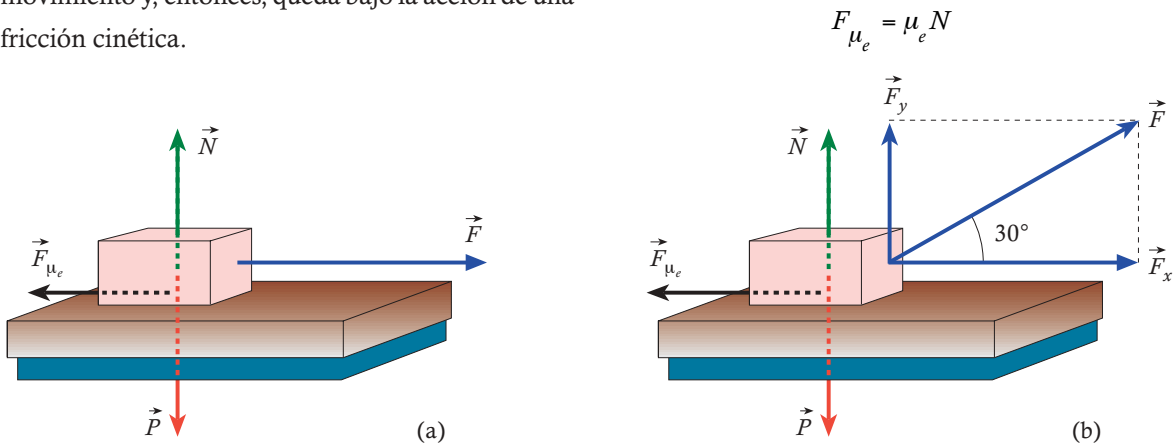


Fig. 9.23 Ejemplo 9.6. **a)** La fuerza aplicada es horizontal con respecto a las superficies en contacto. **b)** La fuerza aplicada forma un ángulo de 30° con respecto a las superficies en contacto.

Como $\mu_e = 0,80$ y la magnitud de la fuerza normal es igual a la magnitud del peso, tendremos:

$$F_{\mu_e} = 0,80 \cdot (9,8 \cdot 80) = 627,20 \text{ N}$$

b) En la fig. 9.23(b) se indican las fuerzas actuantes. La fuerza aplicada, $\vec{F}$, forma un ángulo de 30° con la horizontal. Dicha fuerza puede ser descompuesta en sus componentes F_x y F_y . Para que la caja comience a moverse, es necesario que la componente horizontal de $\vec{F}$, F_x , sea igual a la magnitud de la fuerza de fricción:

$$F_x = F_{\mu_e} = \mu_e N$$

Como la caja no se mueve en dirección vertical, la suma vectorial de las fuerzas en esa dirección debe ser igual a cero:

$$\vec{N} + \vec{F}_y - \vec{P} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{N} = \vec{P} - \vec{F}_y$$

Las componentes horizontal y vertical de $\vec{F}$ son:

$$F_x = F \cos 30^\circ = 0,87F \quad F_y = F \sin 30^\circ = 0,50F$$

La magnitud de la fuerza normal es, de acuerdo a las relaciones anteriores:

$$N = 80 \cdot 9,8 - 0,5F \quad \Rightarrow \quad N = 784 - 0,5F$$

Igualmente:

$$F \cos 30^\circ = F_{\mu_e} = \mu_e N \quad \Rightarrow \quad 0,87F = 0,80N$$

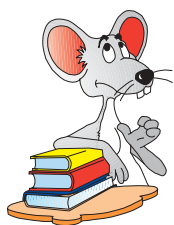
Combinando las ecuaciones deducidas:

$$0,87F = 0,80 \cdot (784 - 0,5F) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 0,87F = 627,20 - 0,40F$$

Finalmente:

$$1,27F = 627,20 \quad \Rightarrow \quad F = \frac{627,20}{1,27} = 493,86 \text{ N}$$



PIENSA Y EXPLICA



9.1 Define lo que es un sistema físico.

9.2 ¿Qué se entiende por interacción en Física? Da ejemplos de interacciones encontradas en la vida diaria.

9.3 ¿Cuáles son las cuatro interacciones fundamentales de la naturaleza?

9.4 Describe la interacción gravitacional y cómo se compara, en magnitud, con las otras interacciones fundamentales.

9.5 Describe la interacción electromagnética y las consecuencias para la vida, de no existir ésta.

9.6 Describe las interacciones fuerte y débil y qué importancia tienen para la actual civilización.

9.7 Define el concepto de fuerza, tal como es considerado por la Física.

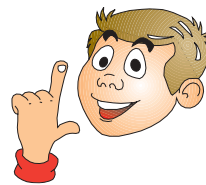
9.8 ¿Por qué se dice que la fuerza es un vector? Explica cómo en la fig. 9.1 se establece el carácter vectorial de la fuerza.

9.9 ¿En qué consiste la composición y descomposición de fuerzas? ¿A qué se llama línea de acción o directriz de una fuerza?

- 9.10** ¿Qué son fuerzas paralelas y qué son fuerzas concurrentes? Dos fuerzas concurrentes, ¿tienen necesariamente el mismo punto de aplicación? Explica.
- 9.11** Demuestra las relaciones (9.11), (9.13) y (9.14) para dos fuerzas paralelas y de la misma dirección, aplicadas en puntos diferentes de un cuerpo.
- 9.12** Demuestra las relaciones (9.15), (9.16) y (9.17) para fuerzas paralelas y opuestas aplicadas en puntos diferentes de un cuerpo.
- 9.13** Explica, mediante el uso de una gráfica, cómo se puede descomponer una fuerza en dos, tres y cuatro componentes.
- 9.14** Explica el método de la descomposición de fuerzas en sus componentes rectangulares para obtener la resultante de un conjunto de fuerzas.
- 9.15** ¿Qué son fuerzas elásticas? ¿Qué son materiales plásticos? ¿Qué son materiales inelásticos? ¿Qué son cuerpos elásticos? Explica la ley de Hooke.
- 9.16** ¿Qué son fuerzas de contacto y fuerzas de campo?
- 9.17** ¿Cómo compararías el método de las componentes rectangulares con el método de la suma vectorial (expresión de la fuerza en sus componentes $\vec{i}$ y $\vec{j}$) para obtener la fuerza resultante de varias fuerzas?
- 9.18** Explica la fuerza de tensión y la fuerza normal.
- 9.19** ¿Qué es la fuerza de fricción? ¿Cuál es su origen? ¿Cuáles son sus características? ¿Cuál es su importancia en nuestro diario quehacer?
- 9.20** Describe las fuerzas de fricción estática y dinámica, estableciendo la diferencia entre las mismas.
- 9.21** Un bloque descansa sobre una superficie. En la presencia de fricción y de una fuerza aplicada al bloque, explica bajo qué condiciones físicas el bloque comienza a moverse.



PROBLEMAS



- 9.1** La silla mostrada en la fig. 9.24 es sometida a la acción de las fuerzas cuyos módulos son: $F_1 = 10 \text{ N}$, $F_2 = 6,5 \text{ N}$ y $F_3 = 3,5 \text{ N}$. La superficie sobre la cual se mueve no tiene fricción. a) Determina la fuerza resultante sobre la silla. b) ¿Puede la silla estar moviéndose? Explica.
- 9.2** El banco de la fig. 9.25 descansa sobre una superficie horizontal y es empujado por las fuerzas de magnitud $F_1 = 10 \text{ N}$ y $F_2 = 2 \text{ N}$. Su masa es de 5 kg y $\mu_d = 0,30$. Determina: a) El valor de la fuerza de fricción entre la superficie y cada pata del banco. b) ¿Se moverá el banco bajo la acción de las fuerzas?

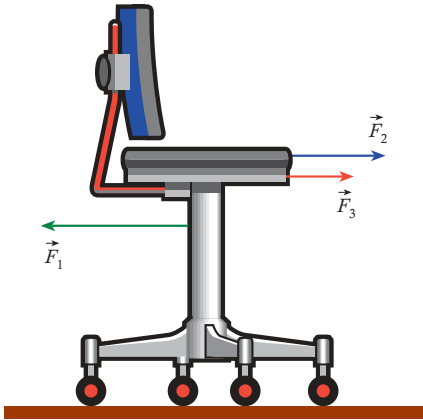


Fig. 9.24 Problema 9.1.

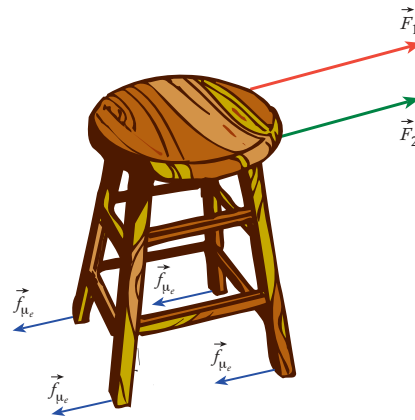


Fig. 9.25 Problema 9.2.

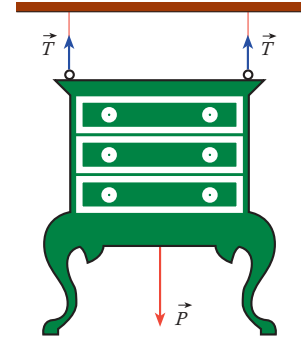


Fig. 9.26 Problema 9.3.

9.3 El mueble de la fig. 9.26, de masa 20 kg se cuelga del techo mediante cuerdas flexibles que pueden soportar, individualmente, una tensión máxima de 20 N. a) ¿Cuál es la tensión en cada cuerda? b) ¿Se caerá el mueble?

9.4 Un helicóptero vuela a una velocidad de 220 km/h hacia el este, como se indica en las figs. 9.27. Si sopla un viento de 60 km/h en las direcciones mostradas en la fig. 9.27(a) y 9.27(b), determina la velocidad resultante del helicóptero, si las velocidades mencionadas se miden con respecto a la superficie terrestre. Utiliza, en ambos casos, los métodos de las componentes rectangulares y la suma analítica de vectores.

9.5 En la fig. 9.28 se presentan dos sistemas en equilibrio. Esto es, el peso del cuerpo que cuelga es compensado por las componentes verticales de las tensiones en las cuerdas, mientras que las componentes horizontales se cancelan. Determina el peso del bloque en la fig. 9.28 (a) y las tensiones en las cuerdas para el caso de la fig. 9.28(b).

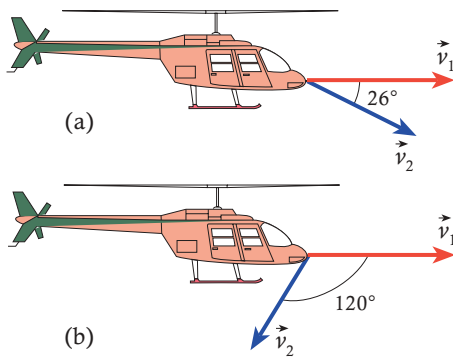
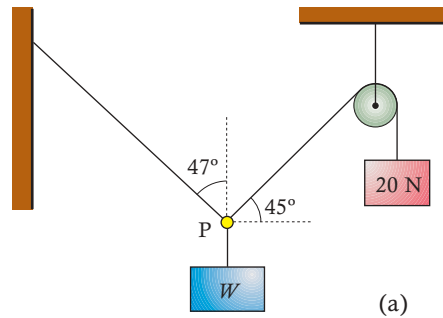
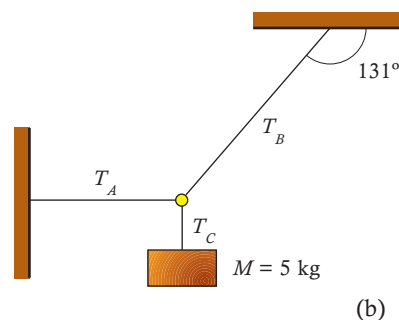


Fig. 9.27 Problema 9.4.



(a)



(b)

Fig. 9.28 Problema 9.5.

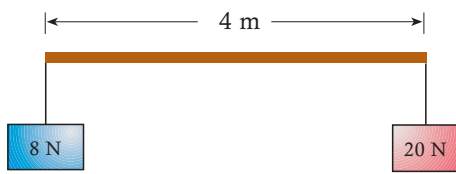


Fig. 9.29 Problema 9.6.

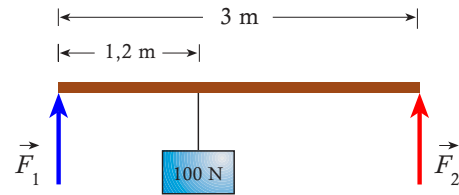


Fig. 9.30 Problema 9.8.

9.6 Una viga de 4 m de largo soporta masas en sus extremos de 20 kg y 8 kg, tal como se muestra en la fig. 9.29. Si se desprecia el peso de la viga, determina el valor de la fuerza resultante y el punto de aplicación de la misma.

9.7 Si la viga del problema anterior tiene un peso de 5 N, ¿cuál es la fuerza resultante sobre la misma y su punto de aplicación?

9.8 Dos personas soportan un peso de 100 N, como se ilustra en la fig. 9.30. La longitud de la tabla usada para cargar dicho peso es de 3 m. ¿Qué fuerza debe hacer cada persona para sostener el peso?

9.9 Se aplican dos fuerzas paralelas y de igual sentido a una tabla de madera. Si la magnitud de la resultante de estas fuerzas es de 120 N y una de las componentes, de 40 N, se encuentra a 0,35 m de la misma, ¿cuál es el valor de la otra componente y a qué distancia se encuentra de la resultante? Ver fig. 9.31.

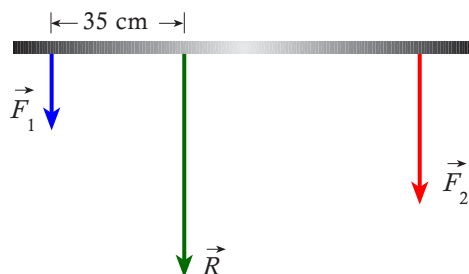


Fig. 9.31 Problema 9.9.

9.10 En la fig. 9.32, la magnitud de la resultante de las fuerzas aplicadas es de 20 N. Si la componente $\vec{F}_1$ tiene una magnitud de 15 N y se encuentra a 8 cm de la resultante, determina el valor de $\vec{F}_2$ y su distancia a la línea de acción de la resultante.

9.11 En las figs. 9.33(a) y (b), determina la fuerza necesaria para que el bloque de masa igual a 20 kg pueda moverse, si el coeficiente de fricción estática entre las superficies envueltas es de 0,30.

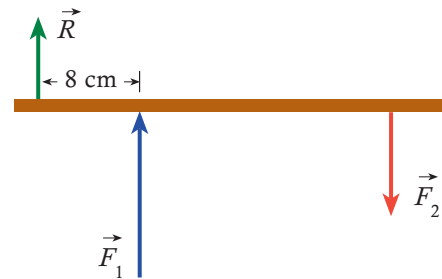


Fig. 9.32 Problema 9.10.

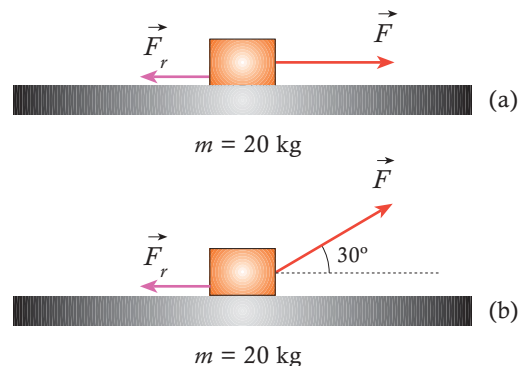


Fig. 9.33 Problema 9.11.

9.12 El bloque que descansa sobre el plano inclinado de la fig. 9.34 tiene una masa de 1 kg. El coeficiente estático de fricción entre el libro y el plano es de 0,65. ¿Cuál es la fuerza de fricción que actúa sobre el libro?

9.13 Un bloque de 25 kg de masa se encuentra sobre una superficie horizontal. El coeficiente estático de fricción entre el bloque y la superficie es 0,50. Dicho bloque se hala mediante una cuerda, como se indica en la fig. 9.35. **a)** ¿Cuál debe ser la magnitud de la fuerza para que el bloque comience a moverse si el ángulo α es de 0° ? **b)** ¿Cuál debe ser la magnitud de la fuerza si el ángulo α es de 45° ?

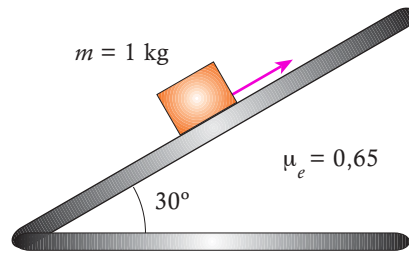


Fig. 9.34 Problema 9.12.

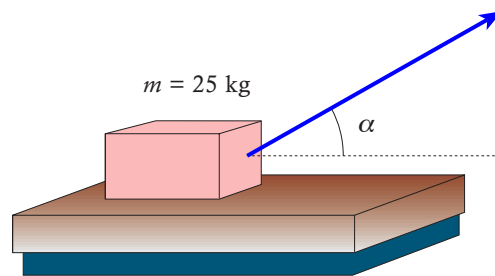
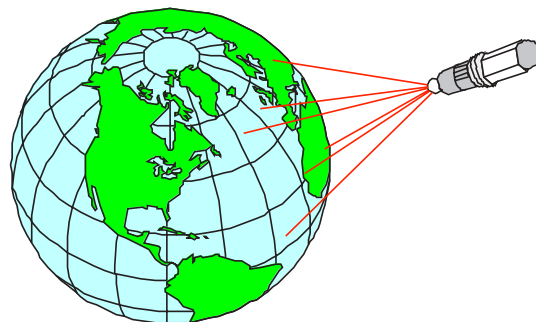


Fig. 9.35 Problema 9.13.

CAPÍTULO 10

Interacciones Gravitacionales y Electromagnéticas



10.1 LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL

El fenómeno físico de la gravedad fue posiblemente observado por el hombre desde sus orígenes, ya que el mismo se manifiesta en forma muy simple y cotidiana, pues cualquier cosa sostenida por encima del suelo, al dejarla libre, caerá en dirección al centro de la Tierra. No obstante ser aparentemente tan sencillo este hecho de la vida corriente, su descripción física no ha sido fácil. Tanto es así que a los físicos les ha tomado más de 2.000 años el pensar y repensar cómo describir este fenómeno y, en la actualidad, todavía no existe, a la luz de los conocimientos actuales de la Física, una explicación realmente satisfactoria sobre el particular. Durante más de 300 años ha sido la teoría formulada por Newton, sobre la gravitación, la que ha prevalecido. Esta teoría fue construida sobre la base de admitir la existencia de una fuerza de atracción mutua entre cuerpos materiales. No obstante su claridad, sencillez y precisión, esta teoría ha resultado deficiente en el tratamiento de los fenómenos de la física moderna (fenómenos de la Física Cuántica y fenómenos del comportamiento de los cuerpos a velocidades muy grandes) y, en este caso, para describir la gravitación se recurre a la Teoría General de la Relatividad formulada por Albert Einstein, la cual se basa, esencialmente, en considerar la atracción gravitatoria, no como una fuerza de atracción mutua entre cuerpos, sino que la caída de un cuerpo en dirección al centro de otro mayor se debe a que este último curva el espacio a su alrededor, lo cual permite que el cuerpo menor se deslice por esa curvatura. Se considera esta teoría como uno de los logros más revolucionarios ocurridos en el mundo de la Física moderna del siglo XX. Sin embargo, debido a la

complejidad matemática y su carácter abstracto, su manejo es más difícil en comparación con la teoría de Newton, la cual sigue vigente, dentro del marco de la Física clásica, que se trata en este curso.

La fuerza de atracción gravitacional es un tipo de *fuerza de campo*, la cual se caracteriza porque sus interacciones se realizan a través del espacio, sin contacto físico entre los cuerpos interactuantes. El término campo en la Física fue introducido por Michael Faraday, físico y químico inglés (1791-1867) quien, en general, expresa el concepto que *si cualquier punto de una región del espacio está asociado a una variable, producto de un fenómeno físico, se dice que en esa región existe un campo*.

Los campos pueden ser de naturaleza escalar y de naturaleza vectorial. Por ejemplo, si estamos en una habitación y encendemos una luz del techo, cualquier punto del espacio de la habitación tendrá una cierta cantidad de iluminación; por lo tanto, podemos decir que en la habitación existe un campo de iluminación. Este es un ejemplo de campo escalar.

*Los campos vectoriales están asociados a fuerzas, por lo cual se denominan **campos de fuerzas**. Si en cualquier punto de una región del espacio, un objeto puesto allí experimenta una fuerza, se dice que en esa región existe un campo de fuerzas.*

La Ley de la Gravitación, formulada por Newton, dice:

Toda partícula atrae a otra partícula que la rodea con una fuerza que es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa. A esa fuerza

de atracción mutua se la llama **fuerza de gravitación**. Esta fuerza de atracción es válida para un sistema de varias partículas.

Si las masas de las partículas son m_1 y m_2 y la distancia entre ellas es d , la magnitud de la fuerza gravitacional es:

$$F_g = G \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \quad (10.1)$$

donde $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ es una constante, conocida como *constante gravitacional universal*. Esta constante se determina experimentalmente. Newton no obtuvo nunca su valor; sólo 71 años después de su muerte, el valor de la misma fue determinado por el físico inglés Henry Cavendish, en 1798, con lo cual se pudo comprobar el carácter universal de la gravitación. Es bueno anotar que Newton no descubrió, en realidad, el fenómeno de la gravedad, pues éste era conocido esencialmente ya por muchos sabios como Copérnico, Kepler, Galileo. Lo que Newton descubrió es que la gravedad es un fenómeno universal.

La relación (10.1) se escribe en forma vectorial, definiendo un vector unitario $\vec{d}$ como se muestra en la fig. 10.1. El vector unitario siempre se origina en la masa, sobre la cual se ejerce la fuerza de atracción gravitatoria. Si, en la fig. 10.1, la fuerza gravitatoria considerada es la que ejerce la masa m_1 sobre m_2 , es decir la fuerza $\vec{F}_{12}$, la dirección del vector $\vec{d}_{12}$ será de m_2 a m_1 y la expresión de la fuerza gravitatoria será:

$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 \cdot m_2}{D_{12}^2} \vec{d}_{12} \quad (10.2)$$

La fuerza de atracción apunta en la dirección de m_2 a m_1 . Igualmente, la fuerza gravitatoria ejercida por m_2 sobre m_1 será $\vec{F}_{21}$ y, como es igual y opuesta a $\vec{F}_{12}$, se puede escribir $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

La ley de la Gravitación Universal de Newton fue formulada sólo para partículas puntuales. Cuando



Fig. 10.1 La fuerza gravitatoria ejercida por m_1 sobre m_2 es $\vec{F}_{12}$ y, a la inversa, $\vec{F}_{21}$ es la fuerza gravitatoria de m_2 sobre m_1 . El vector unitario siempre tiene su origen sobre la masa que se considera que ejerce la fuerza gravitatoria sobre la otra. En la figura, m_2 ejerce una fuerza gravitatoria sobre m_1 ; por lo tanto, el vector unitario, $\vec{d}$, va de m_2 a m_1 .

se trata de cuerpos con su masa distribuida uniformemente, como una esfera, la distancia d se puede tomar como la distancia al centro de cada esfera. Si se tiene una masa esférica muy grande, frente a una muy pequeña, la masa de la esfera grande se considera como si estuviera concentrada en su centro. Cuando los cuerpos que interactúan tienen formas muy irregulares, la separación d no es única y para calcular la fuerza de atracción entre ellos se requiere utilizar el cálculo integral, cuestión que está fuera de los alcances del presente texto. Normalmente y, por conveniencia, se utiliza solo la expresión escalar de la relación (10.2).

10.2 LEY DE COULOMB

Similarmente a como se describió el concepto de la gravedad, como una introducción del enunciado de la ley de la Gravitación Universal, se hace aquí la descripción del concepto de carga eléctrica, como una introducción al enunciado de la ley de Coulomb.

En el mundo actual, un altísimo porcentaje de seres humanos conoce y maneja con soltura el término *electricidad*, asociándolo siempre, y en forma directa, con diferentes artefactos domésticos como un ventilador, una plancha, un bombillo y muchos otros, todos los cuales sabemos que funcionan por causa de algo llamado *electricidad*. También, casi todo el mundo sabe e intuye que la electricidad puede ser algo peligroso. En efecto, muchos de nosotros alguna vez en la vida hemos recibido un "corrientazo" (comúnmente, se menciona así) al tratar de manipular un artefacto eléctrico, una sensación muy desagradable y tan peligrosa que, en algunos casos, puede causar la muerte.

La expresión electricidad deriva de la palabra griega

elektron, la cual designa a la sustancia conocida como ámbar, que es una resina fósil de color amarillo o rojizo, proveniente de árboles de la familia del pino, que se originaron durante la era geológica conocida como el terciario. En la época del filósofo griego Tales de Mileto, se conocía que cuando se frota el ámbar con algodón o una piel, esta sustancia adquiere la propiedad de atraer otros objetos pequeños como pedacitos de papel, pequeños trozos de médula de saúco, etc. El vidrio también adquiere esta propiedad al frotarlo con un trozo de lana.

La fig. 10.2 muestra una esferita de médula de saúco, suspendida con un hilo de seda, a la cual se le acerca una varilla de vidrio, previamente frotada. Al acercar la varilla de vidrio, la bolita de saúco es atraída hacia la varilla. Si se produce un contacto, se observa que la bolita es repelida inmediatamente después del contacto y la misma continuará siendo repelida cada vez que le acerquemos la varilla de vidrio.

Si en lugar del vidrio, acercamos a la bolita repelida, instantes antes, un trozo de ámbar también frotado, se puede observar que la bolita es, entonces, atraída por el ámbar y si se establece un contacto, ambos objetos se repelen.

Las atracciones y repulsiones mencionadas son, evidentemente, expresiones de fuerzas, las cuales, por estar producidas por ese algo llamado electricidad, se denominan *fuerzas eléctricas*. Entonces, las fuerzas eléctricas pueden ser de *atracción* o de *repulsión* y las

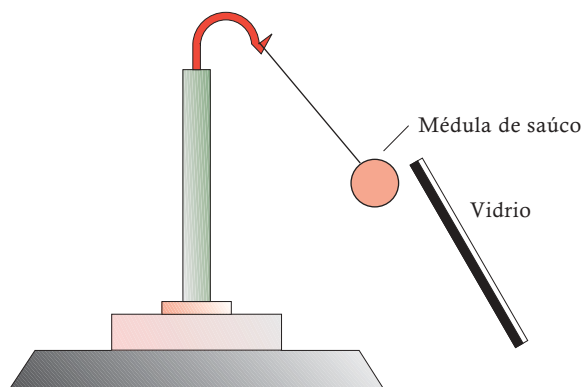


Fig. 10.2 La bolita de médula de saúco es atraída por la varilla de vidrio que ha sido previamente frotada con un trapo de lana. La bolita está eléctricamente aislada a través del hilo de seda, del cual pende, y de la base, que también es un aislante.

mismas demuestran, en cualesquiera de los dos casos antes mencionados, que algo se transfiere después del contacto entre los objetos. Ese algo que se transfiere es la importante cantidad conocida como *carga eléctrica*, la cual es una propiedad fundamental de la materia. A partir de la misma, es posible explicar la existencia de las fuerzas eléctricas de atracción y repulsión mencionadas antes, en forma similar a como las fuerzas gravitacionales pueden ser descritas, si se admite que la materia tiene la propiedad de tener masa gravitacional. De acuerdo con los ejemplos mencionados arriba, se puede ver que el vidrio y el ámbar frotados tienen un comportamiento diametralmente opuesto: el uno atrae lo que el otro repele y viceversa.

A los cuerpos como el vidrio o el ámbar, que tienen la propiedad de atraer o repeler otros cuerpos, se les dice que están cargados eléctricamente o que tienen carga eléctrica. Hoy se reconoce que existen dos tipos de carga eléctrica, en base al comportamiento opuesto de los cuerpos cargados: la carga eléctrica del vidrio llamada carga positiva, distinguida con el signo + (más) y la carga eléctrica del ámbar, llamada carga negativa, y que se distingue con el signo – (menos). Adicionalmente, es importante mencionar que cuando se carga un cuerpo, por ejemplo cuando se frota la varilla de vidrio con un trozo de lana, la carga del vidrio es positiva, como se ha dicho, pero la lana también adquiere carga y la misma será negativa. Se ha comprobado que estas cargas son cuantitativamente iguales. Se puede concluir, por lo tanto, que cuando se carga un cuerpo, en este caso por frotamiento, el otro resulta también cargado con una carga igual pero de signo contrario. A la luz de lo descrito, se puede hacer el siguiente resumen:

- La materia, entre otras propiedades, tiene la de poseer carga eléctrica. Dicha carga eléctrica es de dos tipos: carga eléctrica positiva, distinguida con el signo más (+) y carga eléctrica negativa, identificada con el signo menos (–).
- Todo objeto que atraiga o repela a otro objeto, está eléctricamente cargado. Todo objeto que no atraiga o repela a otro objeto contiene cargas positivas y cargas negativas en igual cantidad, lo cual equilibra la acción de dichas cargas; se dice, entonces,

que el objeto es eléctricamente neutro. El proceso de cargar los cuerpos mediante el frotamiento consiste en transferir carga de un cuerpo al otro, con lo cual, al final del proceso, un cuerpo queda con un exceso de carga positiva y el otro con exceso de carga negativa.

- c. Objetos con carga eléctrica del mismo signo se repelen y objetos con carga eléctrica de signos opuestos se atraen.

Como se ha dicho, la carga eléctrica es una propiedad fundamental de la materia; dicha carga se manifiesta, como se ha mencionado, en dos categorías: cargas eléctricas positivas y cargas eléctricas negativas. De acuerdo con los conocimientos que se tienen sobre la estructura de la materia, la misma está fundamentalmente constituida por un conjunto de partículas muy pequeñas denominadas *átomos*, los cuales se definen como *la porción más pequeña de materia que puede intervenir en una reacción química*. A pesar de que el nombre átomo significa que es una partícula indivisible, en realidad el mismo es una estructura compleja, constituida por un conjunto de partículas denominadas partículas subatómicas o partículas elementales. No obstante el gran número de partículas elementales que forman los átomos, sólo tres partículas se toman como las partes fundamentales constitutivas de éstos, debido a que son estables, en contraposición al resto de partículas, que tienen existencias transitorias y que, normalmente, no forman parte de la materia común y corriente. Las tres partículas fundamentales son el *electrón*, el *protón* y el *neutrón*.

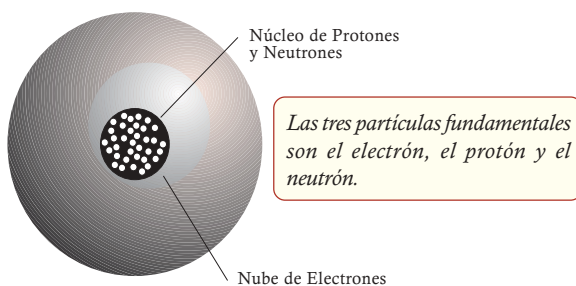


Fig. 10.3 Esquema sobre la estructura de un átomo. El núcleo está constituido por protones con carga positiva y neutrones, sin carga. Los electrones, con carga negativa, forman una nube alrededor del átomo.

De acuerdo con el conocimiento actual sobre la estructura del átomo, los protones y los neutrones conforman un conjunto de partículas que constituyen el núcleo, y los electrones forman una nube alrededor de ese núcleo, como se muestra en la fig. 10.3. *Los electrones presentan la propiedad de tener carga eléctrica negativa y esta carga siempre es la misma en todos los electrones, al igual que su masa*. Por lo tanto, son partículas idénticas a sí mismas. Por otra parte, *los protones tienen carga eléctrica positiva de una magnitud igual a la de los electrones; su masa es 1.800 veces mayor que la de los electrones*; son, también, partículas idénticas a sí mismas. La carga del electrón se designa con la letra e , antecedida por el signo menos ($-$), que indica carga negativa.

De acuerdo a lo anterior, podemos escribir:

$$\text{Carga del electrón} = -e$$

La carga del protón será, entonces:

$$\text{Carga del protón} = +e$$

Los neutrones, como su nombre lo indica, no poseen carga alguna. Es decir, son eléctricamente neutros.

En base a lo expuesto antes, estamos en capacidad de establecer la ley que rige las fuerzas que se ejercen entre partículas o cuerpos cargados. Dicha ley se conoce como *Ley de Coulomb*, y la misma fue formulada por el físico francés, Charles Agustín Coulomb (1736-1786). La ley se enuncia así:

La magnitud de la fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales Q_1 y Q_2 , separadas una distancia R , es directamente proporcional al producto de las cargas, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

En símbolos, se tiene:

$$F_{12} = K \frac{Q_1 \cdot Q_2}{R^2} \quad (10.3)$$

donde K es una constante igual a $9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$. Similarmente al caso de la fuerza de gravitación, la ecuación (10.3) se escribe vectorialmente, en la siguiente forma:

$$\vec{F}_{12} = K \frac{Q_1 \cdot Q_2}{R_{12}^2} \vec{r}_{12} \quad (10.4)$$

donde $\vec{r}_{12}$ es un vector unitario, dirigido desde Q_1 hacia la carga Q_2 sobre la cual se ejerce la fuerza de interacción, como se muestra en la fig. 10.4. Como Q_1 es la carga que ejerce la fuerza de interacción sobre la carga Q_2 , el vector $\vec{r}_{12}$ se generará en la carga Q_1 y apuntará de Q_1 a Q_2 . Si las cargas tienen carga de signos diferentes, la fuerza de interacción será de atracción y tendrá dirección contraria a $\vec{r}_{12}$; si las cargas tienen igual signo, la fuerza será de repulsión y apuntará en la misma dirección de $\vec{r}_{12}$.

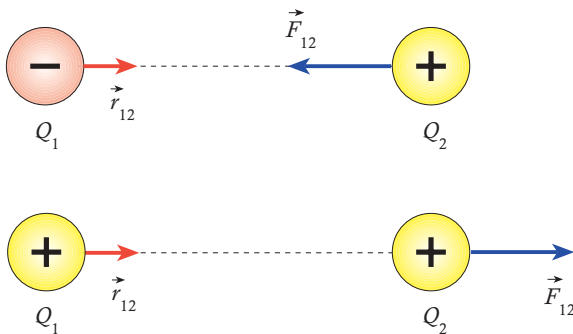


Fig. 10.4 $\vec{F}_{12}$ es la fuerza ejercida por la carga Q_1 sobre la carga Q_2 . El vector unitario $\vec{r}_{12}$ se origina en la carga Q_1 y apunta de Q_1 a Q_2 . La fuerza es de atracción si las cargas tienen signos contrarios y es de repulsión si son del mismo signo.

10.3 MAGNETISMO Y FUERZAS MAGNÉTICAS

El conocimiento sobre los fenómenos derivados de la propiedad que tiene cierto mineral conocido como Magnetita, de atraer trozos de hierro, se inició en la antigüedad, en Grecia. En la ciudad denominada Magnesia, del Asia Menor, se encontraron dichos minerales. Estos minerales fueron llamados también *imanes naturales*. Se observó que esos imanes naturales tenían ciertas regiones donde se intensificaban las interacciones con trozos de hierro u otros

imanes; a estas regiones se denominaron *polos*.

Uno de los efectos más sorprendentes de estos imanes es que, al acercarlos una barra de hierro, ésta adquiere las mismas propiedades del imán y si dejamos que esta barra gire libremente sobre una base vertical, la misma se colocará en la posición geográfica norte-sur. Por esta última característica, fueron utilizados desde la antigüedad en la navegación. A partir del año 1819 fue cuando se pudo demostrar que existía una relación entre los fenómenos eléctricos y los fenómenos magnéticos. Esto lo realizó en primer lugar el físico Hans Christian Oersted (1770-1851), quien demostró que cargas eléctricas en movimiento podían producir efectos magnéticos y los físicos M. Faraday (1791-1867) y J. Henry (1797-1878), quienes, en forma independiente, demostraron lo contrario: que imanes en movimiento podían producir el movimiento de partículas cargadas.

A partir de estos experimentos, se pudo comprobar, posteriormente, que todas las manifestaciones magnéticas de la materia eran producidas por cargas eléctricas en movimiento, con lo cual se logró la unificación definitiva entre fenómenos eléctricos y fenómenos magnéticos, dando lugar al nacimiento de la rama de la Física conocida como electromagnetismo, siendo el físico y matemático inglés, James Maxwell (1831-1879), quien desarrolló, mediante un grupo de ecuaciones que llevan su nombre, la llamada *teoría electromagnética*, la cual es considerada hoy día una síntesis brillante de la unificación de dos teorías físicas: la teoría de la electricidad y la teoría del magnetismo.

Ejemplo 10.1

La distancia media entre la Luna y la Tierra es de $3,8 \cdot 10^8 \text{ m}$ y las masas de esos cuerpos celestes son $m_L = 7,4 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ y $m_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, respectivamente. Determina el valor aproximado de la fuerza de atracción entre la Luna y la Tierra.

Solución

Con $m_1 = m_L$ y $m_2 = m_T$, usamos la relación (10.1) y obtenemos:

$$F_g = G \frac{m_L \cdot m_T}{d^2} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2 \frac{(7,4 \cdot 10^{22} \text{ kg}) \cdot (6 \cdot 10^{24} \text{ kg})}{(3,8 \cdot 10^8 \text{ m})^2} = \\
 &= 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{44,40 \cdot 10^{46}}{14,44 \cdot 10^{16}} \text{ N} = 20,51 \cdot 10^{19} \text{ N}
 \end{aligned}$$

El valor anterior es la magnitud de la fuerza centrípeta, que mantiene a la Luna girando en su órbita alrededor de la Tierra. Esta fuerza es recíproca entre ambos cuerpos.

Ejemplo 10.2

La fig. 10.5(a) muestra una distribución de masas, todas de valor 2 kg. Determina el valor de la fuerza resultante sobre la masa m_3 ejercidas por m_1 y m_2 .

Solución

En la fig. 10.5(b) se muestran tanto los vectores unitarios $\vec{d}_{13}$ y $\vec{d}_{23}$, como aquellos que representan a las fuerzas ejercidas por las masas m_1 y m_2 sobre la masa m_3 . Haremos uso de la relación (10.2) para calcular la resultante. Para ello, es necesario determinar los vectores unitarios $\vec{d}_{13}$ y $\vec{d}_{23}$. Hay que recordar que para hallar un vector unitario de cualquier vector, se divide éste entre su módulo. Un vector que va desde m_1 hasta m_3 es:

$$\vec{D}_{13} = (-5 - 0)\vec{i} + (0 - 8)\vec{j} = -5\vec{i} - 8\vec{j}$$

El módulo de ese vector es:

$$D_{13} = \sqrt{(-5)^2 + (-8)^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89} = 9,43$$

El vector unitario correspondiente se puede escribir como:

$$\vec{d}_{13} = \frac{-5\vec{i} - 8\vec{j}}{9,43} = -0,53\vec{i} - 0,85\vec{j}$$

Para el vector $\vec{D}_{23}$, tendremos:

$$\vec{D}_{23} = (5 - 0)\vec{i} + (0 - 8)\vec{j} = 5\vec{i} - 8\vec{j}$$

Su módulo es:

$$D_{23} = \sqrt{(5)^2 + (-8)^2} = \sqrt{25 + 64} = \sqrt{89} = 9,43$$

Finalmente:

$$\vec{d}_{23} = \frac{5\vec{i} - 8\vec{j}}{9,43} = 0,53\vec{i} - 0,85\vec{j}$$

Las fuerzas $\vec{F}_{13}$ y $\vec{F}_{23}$ serán:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{13} &= G \frac{m_1 \cdot m_3}{D_{13}^2} \vec{d}_{13} = \\
 &= 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 2}{89} (-0,53\vec{i} - 0,85\vec{j}) = \\
 &= 0,30 \cdot (-0,53\vec{i} - 0,85\vec{j}) \cdot 10^{-11} = \\
 &= (-0,16\vec{i} - 0,26\vec{j}) \cdot 10^{-11} \text{ N}
 \end{aligned}$$

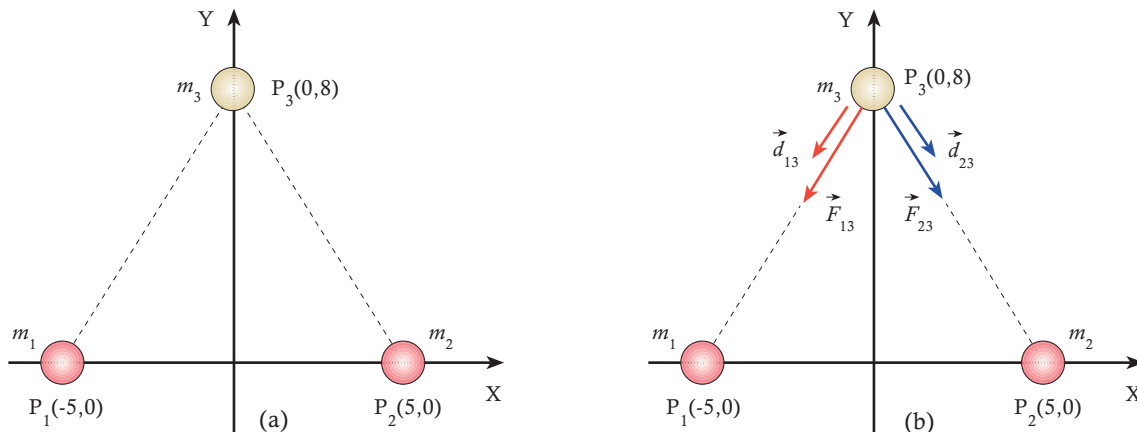


Fig. 10.5 a) Distribución de masas para el ejemplo 10.2. b) Vectores unitarios y fuerzas dirigidas desde las masas m_1 y m_2 hasta la masa m_3 .

La suma vectorial de $\vec{F}_{13}$ y $\vec{F}_{23}$ es:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{23} &= G \frac{m_2 \cdot m_3}{D_{23}^2} \vec{d}_{23} = \\ &= 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{2 \cdot 2}{89} (0,53\vec{i} - 0,85\vec{j}) = \\ &= 0,30 \cdot (0,53\vec{i} - 0,85\vec{j}) \cdot 10^{-11} = \\ &= (0,16\vec{i} - 0,26\vec{j}) \cdot 10^{-11} \text{ N}\end{aligned}$$

Observa que la fuerza resultante sólo tiene componente vertical, ya que las componentes horizontales de las fuerzas sobre la masa m_3 se anulan.

$$\begin{aligned}\vec{F}_R &= (-0,16\vec{i} - 0,26\vec{j} + 0,16\vec{i} - 0,26\vec{j}) \cdot 10^{-11} = \\ &= -0,52 \cdot 10^{-11} \vec{j} \text{ N}\end{aligned}$$

Ejemplo 10.3

En los vértices del triángulo mostrado en la fig. 10.6 se colocan las cargas de valores $Q_1 = 2 \mu\text{C}$, $Q_2 = -2 \mu\text{C}$ y $Q_3 = 4 \mu\text{C}$. Determina la fuerza eléctrica resultante sobre la carga Q_3 .

Solución

Utilizaremos la relación (10.4) para determinar la fuerza resultante. Refiriéndonos a la fig. 10.7, determinaremos los vectores unitarios $\vec{r}_{13}$ y $\vec{r}_{23}$:

$$\vec{r}_{23} = \frac{0\vec{i} + 4\vec{j}}{4} = \vec{j}$$

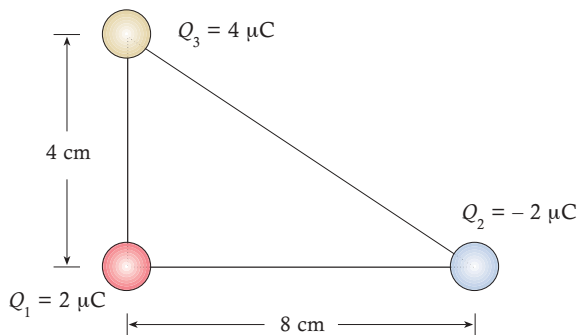


Fig. 10.6 Ejemplo 10.3.

$$\begin{aligned}\vec{r}_{13} &= \frac{(0-8)\vec{i} + (4-0)\vec{j}}{\sqrt{64+16}} = \frac{-8\vec{i} + 4\vec{j}}{\sqrt{80}} = \\ &= \frac{-8\vec{i} + 4\vec{j}}{8,94} = -0,89\vec{i} + 0,45\vec{j}\end{aligned}$$

Las distancias R_{13} y R_{23} están dadas por:

$$R_{13} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m} \Rightarrow R_{13}^2 = 16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

$$R_{23} = \sqrt{(8 \cdot 10^{-2})^2 + (4 \cdot 10^{-2})^2} = \sqrt{80 \cdot 10^{-4}}$$

$$R_{23}^2 = 80 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$

La fuerza $\vec{F}_{13}$ está dada por:

$$\vec{F}_{13} = K \frac{Q_1 \cdot Q_3}{R_{13}^2} \vec{r}_{13}$$

Substituyendo valores:

$$\vec{F}_{13} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{(2 \cdot 10^{-6} \text{C}) \cdot (4 \cdot 10^{-6} \text{C})}{16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2} \vec{j}$$

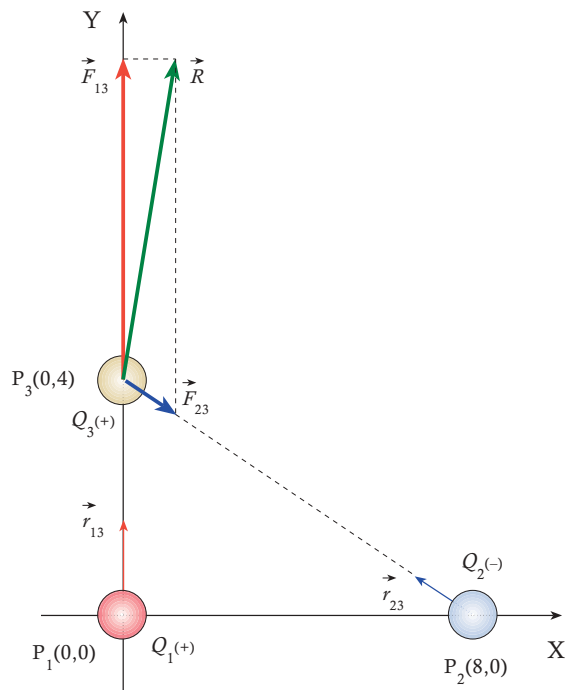


Fig. 10.7 Determinación de la fuerza resultante para el ejemplo 10.3.

$$\vec{F}_{13} = \frac{9 \cdot 2 \cdot 4}{16} \frac{10^9 \cdot 10^{-12}}{10^{-4}} \vec{j} = 45 \vec{j} \text{ N}$$

Para la fuerza $\vec{F}_{23}$, se tiene:

$$\vec{F}_{23} = K \frac{Q_2 \cdot Q_3}{R_{23}^2} \vec{r}_{23}$$

Introduciendo los valores en la fórmula anterior:

$$\vec{F}_{23} = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{(-2 \cdot 10^{-6} \text{C}) \cdot (4 \cdot 10^{-6} \text{C})}{80 \cdot 10^{-4} \text{m}^2} (-0,89 \vec{i} + 0,45 \vec{j}) \text{ N}$$

$$\vec{F}_{23} = -\frac{9 \cdot 2 \cdot 4}{80} \frac{10^9 \cdot 10^{-12}}{10^{-4}} (-0,89 \vec{i} + 0,45 \vec{j}) = -\frac{72}{80} \cdot 10 (-0,89 \vec{i} + 0,45 \vec{j})$$

$$\vec{F}_{23} = -9(-0,89 \vec{i} + 0,45 \vec{j}) = 8,01 \vec{i} - 4,05 \vec{j} \text{ N}$$

$\vec{F}_{13}$ y $\vec{F}_{23}$ pueden expresarse en términos del módulo y ángulo como:

$$F_{13} = \sqrt{0^2 + 45^2} = \sqrt{45^2} = 45 \quad \theta_{13} = \tan^{-1} \frac{45}{0} = \tan^{-1}(\infty) = 90^\circ$$

$$F_{23} = \sqrt{8,01^2 + 4,05^2} = \sqrt{64,16 + 16,40} = 8,98 \quad \theta_{23} = \tan^{-1} \frac{-4,05}{8,01} = \tan^{-1}(-0,51) = -26,82^\circ$$

En la fig. 10.7 se dibujan ambas fuerzas. La fuerza resultante sobre la carga Q_3 es, entonces:

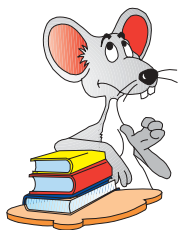
$$\vec{F}_R = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = 45 \vec{j} + 8,01 \vec{i} - 4,05 \vec{j} = 8,01 \vec{i} + 40,95 \vec{j} \text{ N}$$

El módulo y ángulo de la fuerza resultante son:

$$F_R = \sqrt{8,01^2 + 40,95^2} = \sqrt{64,16 + 1.676,30} = \sqrt{1.741,06} = 41,73 \text{ N}$$

$$\theta_R = \tan^{-1} \left(\frac{40,95}{8,01} \right) = \tan^{-1}(5,11) = 79,93^\circ$$

La fig. 10.7 muestra al vector que representa la fuerza resultante.



PIENSA Y EXPLICA



- 10.1** ¿Cuál es el fundamento básico de la teoría de la Gravitación Universal formulada por Newton? ¿Bajo qué condiciones esta teoría pierde vigencia?
- 10.2** ¿Cómo explica la Teoría General de la Relatividad, formulada por Albert Einstein, la atracción entre los cuerpos?
- 10.3** ¿Cuál es el concepto de campo? ¿Puedes definir lo que son un campo escalar y un campo vectorial?
- 10.4** ¿Bajo qué condiciones se dice que en una región del espacio existe un campo de fuerzas?
- 10.5** Expresa lo que dice la ley de la Gravitación Universal de Newton y explícala mediante su formulación matemática.
- 10.6** Explica la forma vectorial de la ley de Gravitación Universal, expresada mediante la relación (10.2).

- 10.7** ¿Cuál es el origen de la palabra *electricidad*?
- 10.8** ¿Qué es una fuerza eléctrica? ¿Cómo se manifiesta este tipo de fuerza?
- 10.9** ¿Por qué se dice que la carga eléctrica es una propiedad fundamental de la materia?
- 10.10** Describe el modelo clásico de la estructura de la materia, señalando las partículas elementales que la conforman y sus características, en cuanto a carga y masa.
- 10.11** Explica la ley de Coulomb y detalla los elementos que intervienen en las expresiones escalar y vectorial de esta ley.
- 10.12** Explica brevemente el fenómeno del magnetismo. ¿Tienen que ver los fenómenos magnéticos con los fenómenos eléctricos?



PROBLEMAS



- 10.1** Determina la relación entre la fuerza eléctrica y la fuerza gravitacional entre un electrón y un protón, situados a una distancia r .

- 10.2** La fuerza de atracción entre dos esferas de masas 50 kg y 80 kg es de 0,01 N. ¿Cuál es la separación entre ellas?

10.3 Dos esferas de igual masa se encuentran a una distancia de 2 cm y experimentan una fuerza de atracción gravitacional de 10^{-4} N. ¿Cuál es la masa de las esferas?

10.4 Dos esferitas de oro, de masa igual a 10 g y radios igual a 1 cm se colocan muy cerca la una de la otra, de manera que casi se tocan (ver fig. 10.8). Determina la fuerza entre ambas esferas. ¿Es esta fuerza de atracción o de repulsión?

10.5 Determina la fuerza resultante sobre la masa m_2 de la fig. 10.9, si todas las masas tienen un valor de 2 kg. Las distancias están expresadas en metros.

10.6 Se tienen cargas de valores $Q_1 = -2 \mu\text{C}$ y $Q_2 = 3 \mu\text{C}$. Determina la fuerza eléctrica entre las mismas si están separadas una distancia de 1 cm. Utiliza la expresión vectorial de la ley de Coulomb para obtener la respuesta.

10.7 Determina las fuerzas (módulo y ángulo) sobre las cargas Q_1 y Q_2 mostradas en la fig. 10.10.

10.8 Determina las fuerzas (módulo y ángulo) sobre las cargas Q_1 y Q_2 para la fig. 10.11.

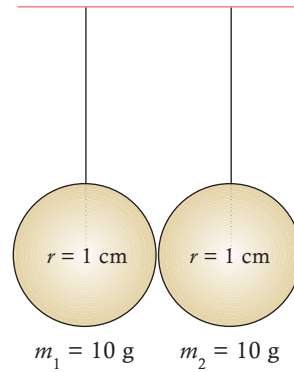


Fig. 10.8 Problema 10.4.

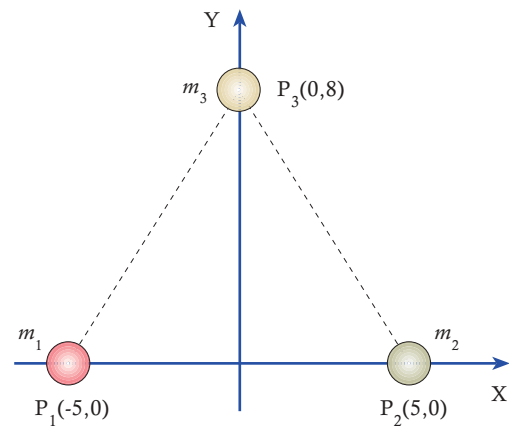


Fig. 10.9 Problema 10.5.

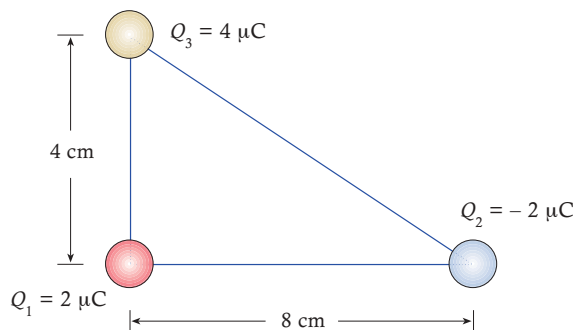


Fig. 10.10 Problema 10.7.

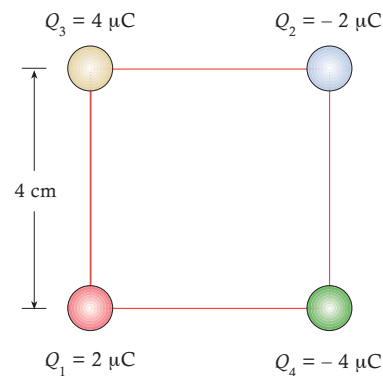
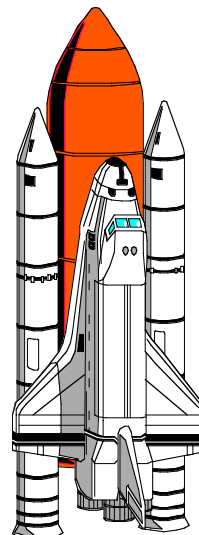


Fig. 10.11 Problema 10.8.

CAPÍTULO 11

Las Leyes de Newton y sus aplicaciones



11.1 TERCERA LEY DE NEWTON: ACCIÓN Y REACCIÓN

El concepto de fuerza se desarrolló como una medida de las interacciones entre cuerpos u objetos. Vamos a estudiar ahora lo que ocurre entre dos cuerpos, cuando entre ellos tiene lugar una interacción.

En la vida cotidiana, nos podemos dar cuenta de hechos como el siguiente: supongamos que una persona intenta mover un carro al que se le agotó la gasolina, cuando circulaba en una calle de superficie plana, aplicándole su fuerza personal, bien sea con las manos o con el hombro. Al hacerlo, es seguro que la persona no logre mover el carro ni un centímetro. Normalmente, la persona piensa que su fuerza es demasiado pequeña para mover el carro, porque el mismo es muy pesado. Al pensar así, la persona cree que él tiene una fuerza propia independiente, y si usted le pregunta cómo es esa fuerza, qué forma tiene, no le podrá responder nada sobre el particular, simplemente porque la fuerza no es ningún ente físico. La fuerza como tal no existe aislada. Las fuerzas, como hemos dicho, son una medida de la interacción entre dos cuerpos, y las mismas sólo surgen cuando ocurre una interacción.

Newton, cuando creaba sus famosas leyes del movimiento, se percató que en la naturaleza no existe efectivamente una fuerza aislada, como la que creía poseer la persona que trató de mover el carro,

sino que *las fuerzas se presentan en pares*: si el hombre aplica una fuerza sobre el carro, el carro aplica una fuerza, igual y de dirección contraria, al hombre. El mismo Newton lo dijo con estas palabras:

"A cada acción, se le opone siempre una reacción igual. O bien, las acciones mutuas de dos cuerpos, unos sobre otros, son siempre iguales y dirigidas hacia las partes contrarias.

Siempre que tiramos o presionamos algo, somos tirados o presionados por aquello. Si presionamos una piedra con nuestro dedo, el dedo también es presionado por la piedra. Si un caballo tira de una piedra atada con una soga, será igualmente tirado hacia la piedra, pues la cuerda distendida, por el mismo intento de relajarse, arrastrará tanto al caballo hacia la piedra como a la piedra hacia el caballo, e impedirá tanto el avance de uno como favorecerá el de la otra..."

Se tiene, entonces, que cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo A, por ejemplo, debemos reconocer que ha ocurrido una interacción con otro cuerpo B. En esta interacción, el cuerpo A ejercerá también una fuerza igual sobre el cuerpo B.

Basado en estas observaciones, Newton formuló la ley de la acción y de la reacción, conocida en la Física como la tercera ley de Newton, la cual dice:

Cuando dos cuerpos interactúan, por ejemplo el cuerpo A y el cuerpo B, de tal manera que el cuerpo A experimenta una fuerza, sea ésta por contacto, por acción gravitatoria, acción electromagnética, etc., el cuerpo B experimenta en forma simultánea una fuerza igual en magnitud, pero de dirección opuesta.

Al tratar sobre la aplicación de la tercera ley de Newton, normalmente se habla de *fuerza de acción* y *fuerza de reacción*. Si el cuerpo A ejerce una fuerza sobre el cuerpo B, se dice que esta fuerza es de acción y la fuerza que el cuerpo B ejerce sobre el cuerpo A es de reacción.

El orden de asignación de los nombres acción o reacción es arbitrario. Por lo tanto, cualquiera de los cuerpos ejerce una fuerza de acción o de reacción. Esto se deriva claramente al considerar que no es que una fuerza aparezca primero y genere luego la otra, sino que ambas se generan simultáneamente, al ocurrir una interacción entre los cuerpos. Es decir, cada cuerpo ejerce sobre el otro su correspondiente fuerza, pero no como una relación de causa a efecto sino como el resultado de una interacción.

Es muy importante tener en cuenta que el par de fuerzas de acción - reacción siempre están aplicadas sobre cuerpos diferentes y debido a que las dos fuerzas son el producto de una interacción entre dos cuerpos, estas fuerzas serán siempre del mismo tipo; es decir, las dos fuerzas, en cada caso que ocurran, serán del tipo de fuerzas de fricción, o fuerzas normales o fuerzas eléctricas de atracción o repulsión, o fuerzas gravitatorias, etc.

Es importante también observar que el par de fuerzas acción - reacción, como resultado de la interacción entre dos cuerpos, no se pueden equilibrar o compensar mutuamente, porque nunca están aplicadas sobre un mismo cuerpo, sino sobre cuerpos diferentes, ya que el equilibrio de fuerzas se refiere o aplica únicamente para un cuerpo en particular.

Ejemplo 11.1

La fig. 11.1 presenta una lámpara que descansa sobre una mesa. Se trata de identificar: **a)** Las fuerzas de acción y reacción que se desarrollan en la interacción entre la lámpara y la Tierra. **b)** Las fuerzas de acción y reacción que se desarrollan en la interacción entre la lámpara y la mesa.

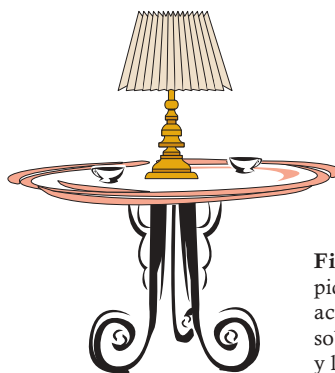


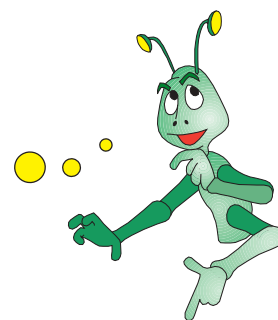
Fig. 11.1 Ejemplo 11.1. Se pide identificar las fuerzas de acción y reacción ejercidas sobre la lámpara por la mesa y la Tierra.

Solución

A cada fuerza de acción (podría considerarse de reacción; es indiferente) sobre la lámpara, ejercida tanto por la Tierra como por la mesa, corresponde una fuerza de reacción de la lámpara sobre la mesa y la Tierra.

Identificaremos en primer lugar la clase de fuerzas resultantes de la interacción entre los cuerpos involucrados y, luego, se hará la identificación y descripción de la aplicación de los pares de fuerzas de acción y de reacción, mediante el uso de la tercera ley de Newton.

Establecimos anteriormente que existen dos grupos



de fuerzas: las fuerzas de contacto y las fuerzas de campo. Es importante aplicar estos conocimientos a cualquier situación en particular, para poder entender y aplicar correctamente la tercera ley de Newton. En este ejemplo, las fuerzas que se desarrollan en la interacción entre la lámpara y la Tierra son del tipo gravitatorio, ya que no existe contacto físico entre estos dos entes, en tanto que las fuerzas entre la lámpara y la mesa son del tipo de contacto.

a) Al analizar el primer caso; es decir, la interacción entre la lámpara y la Tierra, lo primero en que pensamos es en la fuerza de atracción de la Tierra sobre la lámpara. Dicha fuerza, como sabemos, es el peso de la lámpara. Esta fuerza se representa por $\vec{P}$ en la fig. 11.2(a) y la misma está aplicada en el centro de masa de la lámpara y dirigida hacia el centro de la Tierra. Si distinguimos a $\vec{P}$ como la fuerza de acción, entonces, por la tercera ley de Newton, la lámpara ejercerá una fuerza de reacción (fuerza de atracción de la lámpara sobre la Tierra) identificada como $\vec{P}'$, de magnitud igual pero

dirigida en dirección opuesta y aplicada en el centro de la Tierra. Estas dos fuerzas son llamadas el *par acción - reacción*.

Hay que tener en cuenta que si sobre la lámpara no actuara sino la fuerza de acción de la Tierra, como sería el caso de que la mesa no estuviera presente, ésta caería aceleradamente hacia la Tierra, ya que sería la única fuerza actuando sobre ella. Si este fuera el caso, la fuerza de reacción de la lámpara sobre la Tierra provocaría un movimiento acelerado de la Tierra hacia arriba, hacia la lámpara que cae. Este movimiento es verdaderamente imperceptible, pero realmente ocurre mientras la lámpara cae y se asienta en el terreno.

Explicemos algo más de esta situación planteada. Supongamos que, en realidad, la lámpara cae sobre la Tierra. De acuerdo con la tercera ley del movimiento de Newton, el par acción - reacción sigue presente, luego que la lámpara toca tierra y estabiliza su posición. Hay que enfatizar que las fuerzas de acción - reacción, por ser de igual magnitud y opuestas, no se anulan una a otra, es decir no se equilibran o compensan y esto es debido a que son fuerzas que se aplican siempre sobre cuerpos diferentes: la Tierra ejerce su fuerza de acción sobre la lámpara y ésta ejerce su fuerza de reacción sobre la Tierra. Sin embargo vemos que la lámpara, cuando toca tierra, no se mueve, queda en un estado de equilibrio.

Ahora bien, ¿qué fuerzas mantienen el equilibrio, si como hemos visto, las fuerzas de acción - reacción no se compensan?: cuando la lámpara llega a la superficie de la Tierra, se producen fuerzas de contacto de tipo elásticas entre la lámpara y la Tierra, las cuales tienen la capacidad de equilibrar el par acción - reacción. Estas fuerzas son: la fuerza normal, ejercida por la Tierra sobre la lámpara, la cual compensa la fuerza de acción ejercida por la Tierra sobre ésta y la reacción a la normal que compensa la fuerza de reacción de la lámpara sobre la Tierra. No olvidemos que el equilibrio se produce siempre con fuerzas actuando sobre un mismo cuerpo.

b) Continuando con el análisis, ver fig. 11.2(b), vemos que, como la lámpara descansa sobre la mesa, la interacción entre estos dos cuerpos da lugar a una

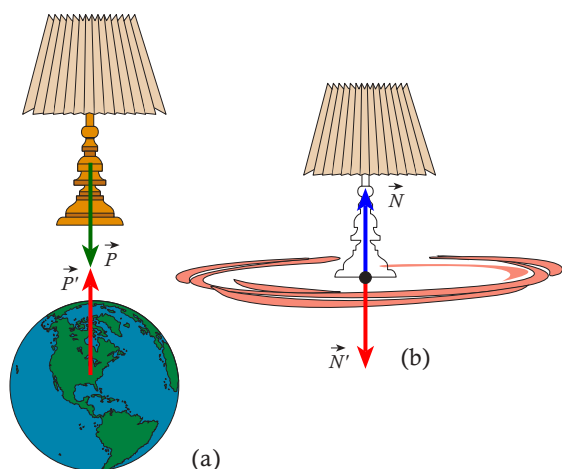


Fig. 11.2 Ejemplo 11.1. a) Par de fuerzas de acción y reacción ejercidas entre la lámpara y la Tierra y la lámpara y la mesa. Podemos considerar que el peso $\vec{P}$ de la lámpara es la fuerza de acción con la cual la Tierra atrae al florero y la fuerza $\vec{P}'$ es la fuerza de reacción con la cual la lámpara atrae a la Tierra. b) La mesa ejerce una fuerza de acción, $\vec{N}$, sobre la lámpara y este último ejerce una fuerza de reacción $\vec{N}'$, sobre la mesa. En cada caso, las fuerzas de acción y reacción son de igual magnitud, pero de direcciones contrarias y las mismas se aplican, tal como hemos descrito, sobre cuerpos diferentes.

fuerza de acción $\vec{N}$ hacia arriba y perpendicular, de la mesa sobre la lámpara, y una fuerza de reacción $\vec{N}'$ hacia abajo, de la lámpara sobre la mesa. Estas fuerzas son fuerzas normales de contacto, tal como fue definido este concepto cuando se estudiaron las clases de fuerzas. Estas dos fuerzas constituyen también un par de acción - reacción.

Es importante identificar lo siguiente: la fuerza $\vec{N}$ ejercida por la mesa sobre la lámpara equilibra el peso del mismo y está aplicada en el centro de masa de la lámpara. Se observa, por otra parte, que la fuerza con la cual la Tierra atrae a la lámpara, también está aplicada en su centro de masa. Estas dos fuerzas, por actuar sobre un mismo cuerpo, la lámpara, no constituyen un par de fuerzas de acción-reacción, tal como lo exige la tercera ley de Newton: *las fuerzas de acción-reacción son siempre fuerzas que actúan sobre cuerpos distintos*.

Resumiendo sobre el tipo de fuerzas que intervienen en el ejemplo, se puede decir que las fuerzas presentes en la interacción entre la lámpara y la Tierra son del tipo gravitatorio, ya que no existe contacto físico entre estos dos entes y las fuerzas entre la lámpara y la mesa son fuerzas normales de contacto (perpendiculares a la superficie de contacto). En términos matemáticos, se puede escribir:

$$\vec{P} = -\vec{P}' \qquad \vec{N} = -\vec{N}'$$

Observa también que, en este caso, $\vec{N}$ tiene la misma magnitud que $\vec{P}$.

El hecho de que un cuerpo tan pequeño como una lámpara pueda atraer hacia sí, con aceleración, a un cuerpo de masa astronómica como la Tierra es algo difícil de comprender y aceptar; pero, según la historia, a Newton le costó mucho razonar éste y otros hechos relacionados con la gravitación aplicada a la Astronomía, hasta que, finalmente, llegó a la solución con la formulación de la tercera ley o ley de la acción y reacción.

11.2 PRIMERA LEY DE NEWTON: LEY DE LA INERCIA

En el capítulo 4 se estudió el movimiento de los cuerpos, sin tener en cuenta la causa que producía

ese movimiento y, entre otros puntos, se describieron los conceptos de desplazamiento, velocidad y aceleración. El estudio del capítulo 10 se inició introduciendo el concepto físico de interacción, el cual se describió como el efecto de la acción recíproca entre elementos de un sistema individual o entre dos o más sistemas. El efecto resultante es una modificación del comportamiento de los elementos interactuantes del sistema o del sistema mismo. Luego, se introdujo el concepto de fuerza como medida de las interacciones y se siguió tratando el tema de las fuerzas hasta llegar a la ley de la Gravitación Universal, la ley de Coulomb y la ley de acción - reacción o tercera ley de Newton. A continuación, se desarrolla el estudio de la *ley de la inercia* o *primera ley Newton*, como también se le conoce.

Cuando se inició el estudio del concepto de fuerza como una medida de las interacciones entre los cuerpos, se asoció la idea física de fuerza con cierto cambio en el estado del movimiento de las cosas. Más concretamente, Newton definió el concepto de fuerza como "*una acción que se ejerce sobre un cuerpo para cambiar su estado, sea de reposo o de movimiento uniforme*". Esto revela que existe una relación física que relaciona la fuerza con el reposo o movimiento de los cuerpos.

La idea de que la fuerza es la causa del movimiento de los cuerpos fue establecida desde la época de los griegos por Aristóteles, uno de los filósofos y científicos más grandes de la humanidad, cuyas teorías perduraron durante 2.000 años hasta la época de Galileo Galilei y Newton. Sin embargo, al ser planteada por el genio de Aristóteles se convirtió en uno de los más grandes errores en la historia de la Física. Este sabio estableció que el estado normal de existencia de los cuerpos era el reposo, si no había una fuerza externa que se aplicara sobre ellos. Se excluía el movimiento de los cuerpos celestes, los cuales se movían según una categoría de movimiento establecida por el mismo Aristóteles, llamada movimiento natural, el cual no requería ninguna causa para mantener dichos cuerpos en movimiento.

Sostenía Aristóteles que, fuera del movimiento natural, todo lo que se moviera era debido a causas externas; es decir, fuerzas y, luego que dejaran de actuar, el cuerpo tenía forzosamente que llegar a

su estado normal de existencia: el reposo. Tal vez esta conclusión, aparentemente lógica, se debió al observar que un cuerpo en reposo sobre una superficie horizontal se mueve al aplicarle una fuerza y, luego que cesa la acción de la fuerza, el cuerpo se va moviendo cada vez más lentamente, hasta que, finalmente, llega al reposo. Sin embargo, Galileo Galilei, mediante su método experimental, llegó a conclusiones diferentes a lo establecido por Aristóteles.

Como se muestra en la fig. 11.3, Galileo Galilei colocó un plano inclinado frente a otro, con una determinada inclinación, y soltó del reposo una esfera de latón, la cual, después de pasar por el fondo, subía hasta una altura casi igual a la altura desde donde la soltó. Repitió el experimento con otro plano de inclinación menor y observó que la esfera, aun cuando tenía que recorrer mayor distancia, siempre subía, como el caso anterior, un poco menos que la altura desde donde había sido lanzada. Repitió estos experimentos con ángulos de inclinación cada vez menores del plano inclinado del frente, pero puliendo la esfera y alisando los planos. En estas condiciones obtenía los mismos resultados. Es decir, la esfera en el segundo plano siempre alcanzaba una altura menor a la altura de donde la soltaba. Galileo pensó, entonces, en forma correcta, que la diferencia en las alturas que alcanzaba la esfera se debía a la fricción entre la esfera y los planos inclinados. ¿Qué pasaría, entonces, si el segundo plano se pusiera perfectamente horizontal y no existiera fricción entre el plano y la esfera? La respuesta que dedujo era simple, pero producto de una mente genial: *la esfera continuaría moviéndose eternamente con movimiento uniforme y en línea recta, pues no habría ninguna causa (fuerza) que cambiara su estado de movimiento.*

Esta conclusión estaba en total desacuerdo con lo sostenido por Aristóteles, para quien el movimiento

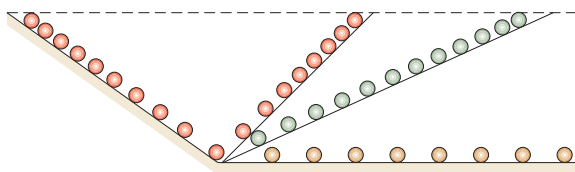


Fig. 11.3 Experimento de Galileo para refutar la teoría de Aristóteles, según la cual para que un cuerpo se mueva, es necesario que se le aplique una fuerza.

de un cuerpo sólo podría mantenerse si se aplicara continuamente una fuerza sobre el mismo. Así, si un cuerpo permanecía en reposo, era porque no existía ninguna fuerza que actuara sobre él, pero una vez que se le aplicara una fuerza, éste comenzaría a moverse y mantendría este movimiento mientras tuviera la fuerza aplicada. Al dejar de aplicarle la fuerza, el cuerpo regresaría al reposo.

El nuevo enfoque sobre el movimiento y el estado normal de los cuerpos, planteado por Galileo, llevaba a concluir que no está en la naturaleza de los cuerpos volver al reposo, luego de iniciar un movimiento, sino que su naturaleza es oponerse a cualquier cambio en su movimiento. Galileo lo expresó de esta manera:

"Cualquier velocidad, una vez aplicada a un cuerpo en movimiento, se mantendrá estrictamente siempre que las causas externas de retardo se eliminen".

De estos resultados de Galileo, se deduce que si a un cuerpo en movimiento de repente se le aplica una causa externa, es decir una fuerza, éste automáticamente se opondrá a cambiar su velocidad. O, lo que es lo mismo, el cuerpo presentará una resistencia a cambiar su estado de movimiento, no obstante que la velocidad cambie por la acción de la fuerza. Dicho cambio podrá consistir en el aumento continuo de la velocidad, la disminución continua de ésta, hasta llegar al reposo o, bien, un cambio en la dirección del movimiento. Galileo llamó *inercia* a esta resistencia al cambio del estado de movimiento de los cuerpos.



En términos sencillos al concepto de inercia se le conoce, también, como la pereza al cambio del estado de movimiento que poseen los cuerpos en la naturaleza.

Isaac Newton recogió este enfoque presentado por Galileo y lo sintetizó en un enunciado conocido como la *primera ley de Newton* o *ley de la inercia*, como también se le conoce. Este enunciado se expresa así:

Todo cuerpo en reposo permanecerá en reposo y todo cuerpo en movimiento permanecerá en movimiento con velocidad uniforme (no acelerado) en línea recta, a menos que se le obligue a cambiar ese estado por la aplicación de una fuerza externa.

El enunciado de la ley establece que si se quiere modificar el estado de reposo o movimiento de un cuerpo, se requiere la acción de una fuerza. Luego que un cuerpo adquiere cualesquiera de esos estados, el mismo permanecerá eternamente en él si no se aplica una fuerza.

11.3 MASA INERCIAL. UNIDAD DE MASA.

En sus reflexiones sobre el movimiento, Galileo estableció que no está en la naturaleza de los cuerpos volver al estado de reposo, una vez que se ha iniciado un movimiento, sino que su naturaleza es oponerse a cualquier cambio en su movimiento. En sus propias palabras: *cualquier velocidad, una vez aplicada a un cuerpo en movimiento, se mantendrá estrictamente, siempre que las causas externas de retardo se eliminen.* Galileo llamó *inercia* a esta resistencia al cambio del estado de movimiento de los cuerpos.

Se dijo anteriormente que la inercia es una propiedad de la materia, tal como lo son el volumen, la impenetrabilidad, la composición química, etc. Entonces, *la inercia de un objeto no es otra cosa que la medida del efecto de una fuerza externa aplicada al objeto.* Por ejemplo, si una persona trata de mover un auto que se ha quedado sin gasolina en el medio de la calle, requerirá aplicar un esfuerzo mayor que si se tratara de mover una motocicleta en las mismas condiciones. En el primer caso, diremos que el auto tiene una inercia mayor que la motocicleta. Ahora bien, cuando se dice que un cuerpo tiene más inercia que otro, se quiere significar que tiene mayor cantidad de materia que el otro.

La cantidad de materia de un cuerpo se identifica en Física, desde la época en que Newton la definió, como la cantidad de masa de ese cuerpo, y la misma se utiliza como una medida de su inercia. Cuanto mayor sea la masa de un cuerpo, tanto mayor será su inercia. Es decir, mayor será la fuerza necesaria para cambiar su estado

de reposo o movimiento rectilíneo y uniforme. También, podemos decir que mientras mayor sea la masa de un cuerpo, menor será su aceleración frente a la acción de una fuerza de la misma magnitud.

La masa se mide en kilogramos, siendo esta la unidad internacional de masa en el SI. Es importante no confundir la masa de un cuerpo con su volumen, ya que el volumen es una medida del espacio, el cual se expresa en unidades como cm^3 , m^3 , litros, etc, mientras que la masa se mide en kilogramos, como se ha dicho. Una bola de billar tiene un volumen muy pequeño, en comparación con una pelota de fútbol. Sin embargo, todos sabemos que es más difícil poner en movimiento la bola de billar que la pelota de fútbol, lo cual significa que la bola de billar tiene una inercia mayor y, por lo tanto, una masa mayor.

Igualmente, no se debe confundir la masa con el peso, cuestión que se hace con alta frecuencia. El peso es una medida de la fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre un cuerpo y depende del sitio geográfico donde esté situado dicho cuerpo. En cambio la masa, como se describió antes, mide la cantidad de materia que contiene un cuerpo y la misma depende únicamente del tipo y cantidad de átomos que contenga ese cuerpo. Por ejemplo, la bola de billar en la Luna pesaría seis veces menos que en la Tierra, debido a que la fuerza gravitacional de la Luna es una sexta parte de la de la Tierra. En cambio, su masa sigue siendo igual a que si estuviera en la Tierra, pues continua teniendo la misma clase y cantidad de átomos. Por lo tanto, para cambiar el estado de movimiento de la bola de billar; es decir, hacer que inicie un movimiento o detenerla luego de iniciado el movimiento, se requiere la misma fuerza, independientemente de si esta acción se lleva a cabo en la Tierra, la Luna o en un lugar del espacio donde no existan fuerzas gravitatorias.

Aun cuando la masa y el peso son dos cantidades diferentes, cuantitativamente son proporcionales entre sí, de manera que un cuerpo muy pesado tiene una masa muy grande; igualmente, los cuerpos con pesos pequeños tienen masa pequeña y si en un mismo lugar de la Tierra, se duplica el peso de un cuerpo, la masa también se duplica.

Hemos descrito cualitativamente la propiedad de la

materia denominada masa; ahora, nos proponemos dar una descripción cuantitativa de la misma. Para lograr esto, procedemos de la siguiente manera: medimos las aceleraciones que una fuerza determinada produce sobre dos cuerpos de masa m_1 y m_2 y comparamos estas aceleraciones. Así, la fuerza que se aplica sobre el cuerpo de masa m_1 producirá la aceleración a_1 y si la misma fuerza actúa sobre el cuerpo de masa m_2 , producirá la aceleración a_2 . Como ya se estableció, frente a la aplicación de una fuerza de la misma magnitud, un cuerpo que tiene mayor masa tendrá menor aceleración que otro que tiene menor masa. Es decir, si comparamos la razón entre las dos masas, vemos que es inversamente proporcional a la razón de las respectivas aceleraciones. Esto es,

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1} \quad (11.1)$$

11.4 SEGUNDA LEY DE NEWTON

Cuando se estudió la Cinemática, se dió la definición de aceleración con total independencia de la causa que producía dicha aceleración. Allí se estableció que la aceleración de un cuerpo es la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo. En símbolos, esto se expresa así:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1} \quad (11.2)$$

Ahora bien, cuando se requiere saber la causa que produce la aceleración de un cuerpo, se debe aplicar la ley de la fuerza o de la masa de Newton, más conocida en Física como la *segunda ley del movimiento de Newton*.

La ley de la inercia, nos dice que un cuerpo sobre el que no actúa ninguna fuerza o si la resultante de un conjunto de fuerzas aplicadas al cuerpo es cero, éste permanecerá en reposo, si estaba en reposo, o bien, permanecerá en movimiento rectilíneo y uniforme si estaba en movimiento, en ausencia de rozamiento o fricción. Si sobre el cuerpo en cuestión actúa una fuerza o un conjunto de fuerzas cuya resultante no sea cero; es decir, sobre el cuerpo se tiene una fuerza neta aplicada, el cuerpo se moverá, mientras tenga

aplicada esa fuerza, con un movimiento cuya velocidad estará cambiando a medida que transcurre el tiempo. A este tipo de movimiento se le denomina acelerado, ya que, después de iniciado, el mismo transcurre, a través del tiempo, con una permanente razón de cambio de la velocidad, mientras dure la aplicación de la fuerza neta. Entonces, podemos asegurar que *todo cuerpo sobre el cual actúe una fuerza neta, se acelerará*.

Experimentalmente se puede comprobar que la aceleración del cuerpo depende tanto de la cantidad de fuerza aplicada como de su masa. Así, si aplicamos una fuerza para empujar una caja llena de libros sobre un piso horizontal, relativamente liso y sin obstáculos, la caja se moverá con una cierta aceleración; si le aplicamos el doble de la fuerza, la aceleración que adquirirá la caja será el doble y si le aplicamos una fuerza tres veces mayor, la aceleración será igualmente tres veces mayor. Los resultados obtenidos con esta experiencia nos llevan a concluir que *la aceleración que adquiere un cuerpo es directamente proporcional a la fuerza o fuerza neta aplicada*. También, como se ha dicho, la aceleración depende de la masa del cuerpo. Si aplicamos a la caja anterior una fuerza, la misma se mueve con cierta aceleración. Si duplicamos el tamaño de la caja, al igual que la cantidad de libros y aplicamos la misma fuerza, la aceleración se reduce a la mitad y si triplicamos tanto el tamaño de la caja como la cantidad de libros, manteniendo la misma fuerza, la aceleración será tres veces menor. A partir de estos resultados, podemos también concluir que la aceleración producida por una fuerza neta aplicada a un cuerpo es inversamente proporcional a la masa del mismo. La segunda ley de Newton resume estos resultados de la manera siguiente:

La aceleración de un cuerpo, debida a la aplicación de una fuerza neta sobre el mismo, es directamente proporcional a la fuerza neta aplicada e inversamente proporcional a su masa. La aceleración tiene la misma dirección de la fuerza neta.

En símbolos, la segunda ley de Newton se expresa como:

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad (11.3)$$

Esta fórmula se puede escribir, en su forma más general, como:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (11.4)$$

donde el símbolo Σ representa la sumatoria o resultante de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo, es decir la fuerza neta aplicada.

En el SI, la unidad de fuerza es el Newton y el mismo se define de la manera siguiente:

1 newton es la fuerza que al actuar sobre un cuerpo con una masa de 1 kg, produce en el mismo una aceleración de 1 m/s².

A partir de esta definición, el newton, como unidad de fuerza, queda expresado en unidades fundamentales del sistema internacional de medidas, pues si la masa se expresa en kg, la longitud en metros y el tiempo en segundos, tendremos:

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$$

Una unidad de fuerza que se utiliza con relativa frecuencia es la *dina*, la cual corresponde al sistema centímetro - gramo - segundo y se define como la fuerza que, al actuar sobre un cuerpo con masa igual a un gramo, le produce una aceleración de un 1 cm/s², es decir:

$$1 \text{ dina} = 1 \text{ g cm/s}^2$$

Ejemplo 11.2

Un vehículo de masa 1.200 kg se desplaza en línea recta con una rapidez de 72 km/h. El conductor, al ver un obstáculo, frena y detiene el móvil en 7 s. Determina la fuerza necesaria para frenar el vehículo y di qué agente produjo esta fuerza.

Solución

Primero, reduzcamos las unidades de rapidez de km/h a m/s:

$$72 \text{ km/h} = \frac{72 \cdot 1.000 \text{ m}}{3.600 \text{ s}} = 20 \text{ m/s}$$

La aceleración la calculamos usando la relación (11.2), tomando en cuenta que cuando el vehículo se detiene su velocidad es igual a cero:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{0 \text{ m/s} - 20 \text{ m/s}}{10} = -2 \text{ m/s}^2$$

donde el signo negativo indica que la aceleración se opone al aumento de velocidad. La relación (11.3) nos permite calcular la fuerza a aplicar para detener el vehículo:

$$F = m \cdot a = 1.200 \text{ kg} \cdot (-2 \text{ m/s}^2) = -2.400 \text{ N}$$

La fuerza calculada, precedida por un signo negativo, por ser una acción opuesta al movimiento, tiene su origen en la interacción entre los cauchos del vehículo y el pavimento. Si el vehículo avanza hacia la derecha, antes de frenar, los cauchos empujan al pavimento hacia atrás y, como consecuencia, el pavimento empuja al vehículo hacia delante. Cuando se aplican los frenos, el pavimento ejerce una fuerza sobre el vehículo, de dirección contraria al movimiento del mismo. Es esta fuerza la que detiene al vehículo

11.5 EL PESO DE LOS CUERPOS

El concepto del peso de los cuerpos ya fue tratado en secciones anteriores, pero debido a la importancia que tiene en el estudio de la Física, en general, y en la Mecánica, en particular, lo trataremos con mayor amplitud aquí. Como experiencia cotidiana, todos sabemos que cualquier cuerpo sostenido por encima del suelo, al dejarlo libre, cae hacia la Tierra, siendo atraído hacia el centro de la misma. La atracción de la Tierra se corresponde a una fuerza del tipo de campo, tal como se describió en la sección donde se estudiaron los tipos de fuerzas.

La fuerza de atracción que la Tierra ejerce sobre un cuerpo se denomina *peso del cuerpo* y, como fuerza al fin, es un vector. Se representa, usualmente, por $\vec{P}$. Ahora bien, esta fuerza de atracción de la Tierra, *fuerza gravitacional* o *fuerza gravitatoria*, como también se le conoce, es una fuerza no equilibrada, y produce

sobre el cuerpo una aceleración. Esta aceleración se denomina *aceleración debida a la gravedad* o, en su forma más conocida, *aceleración de la gravedad*, la cual actúa hacia el centro de la Tierra. La aceleración de gravedad se representa universalmente por la letra g y la misma tiene el valor aproximado de $9,80 \text{ m/s}^2$. De acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza aplicada por la Tierra sobre el cuerpo de masa m que cae libremente es:

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Por otra parte, la expresión matemática de la fuerza de atracción o peso será:

$$\vec{P} = m\vec{g} \quad (11.5)$$

Pero, en este caso, se tiene que $\vec{F} = \vec{P}$; por lo tanto, $\vec{a} = \vec{g}$.

Al utilizar la relación (11.5), las unidades de los términos que intervienen en la misma serán las definidas según la segunda ley de Newton. Es decir, si m se expresa en kg y g en m/s^2 , P vendrá expresado en newtons.

Si analizamos la ecuación del peso, $\vec{P} = m\vec{g}$ y, de acuerdo a lo estudiado sobre el concepto de masa y de la fuerza de la gravedad en secciones anteriores, se deduce que la masa m de un objeto es constante e independiente del sitio donde éste se encuentre. Es decir, la masa es una propiedad inherente de la materia. La aceleración g , en cambio, varía de acuerdo al sitio donde se encuentre el cuerpo. La variación de g se fundamenta en el hecho de que las fuerzas de atracción de la Tierra sobre un cuerpo y del cuerpo sobre la Tierra, se suponen que tienen su punto de aplicación en sus respectivos centros de masa, y de acuerdo con la relación:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{d^2} \quad (11.6)$$

Vemos, aplicando esta ecuación para el caso de la fuerza de atracción ejercida por la Tierra sobre un cuerpo que cae libremente, que dicha fuerza es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de su distancia al centro de masa de ambos cuerpos. Por lo tanto, entre más cerca esté un cuerpo de la Tierra,

mayor será la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre él y, en consecuencia, mayor será la aceleración de la gravedad g del cuerpo que cae.

Es importante aclarar, en relación a la ecuación $\vec{P} = m\vec{g}$, que el peso de un cuerpo no siempre depende de g , ya que un cuerpo que está en reposo, como un libro que descansa sobre una mesa, tiene el mismo peso si el mismo estuviera en caída libre. Esto se puede explicar a partir de la relación (11.5). Si un cuerpo de masa m está sobre la superficie de la Tierra y considerando que la Tierra es una esfera perfecta cuya masa es M , la distancia d será el radio R , entonces el peso del cuerpo se expresa como:

$$P = G \frac{m \cdot M}{R^2} \quad (11.7)$$

donde $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$. M y R son valores conocidos; por lo tanto, podemos calcular el peso sin necesidad de hacer uso de la aceleración de la gravedad, g . Como el peso es igual a mg , de la relación (11.7), obtenemos:

$$mg = G \frac{m \cdot M}{R^2} \Rightarrow g = G \frac{M}{R^2} \quad (11.8)$$

Observa que la masa del cuerpo que cae no aparece en la relación (11.8). Por lo tanto, la aceleración de la gravedad sobre dicho cuerpo, como se puede ver, no depende de su masa, sino de la masa de la Tierra y de la distancia al centro de ésta. Esto significa que, en ausencia de la resistencia del aire:

Todos los cuerpos que caen sobre la Tierra, cualquiera que sea su masa, es decir cualquiera que sea su tamaño y composición, caen con la misma aceleración y en el mismo tiempo.

Así, por ejemplo, si se sueltan desde la misma altura un pedazo de hierro de 100 kg y una pluma de ave de 150 gramos, en ausencia de la resistencia del aire, éstos caerán sobre la Tierra con la misma aceleración g y en el mismo tiempo.

Haciendo uso de la relación (11.8), podemos calcu-

lar fácilmente la masa de la Tierra. Si la aceleración de gravedad al nivel del suelo es $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ y $R = 6,38 \cdot 10^6 \text{ m}$, obtenemos, a partir de (11.8), el valor $M = 5,98 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ como la masa de la Tierra.

La aceleración de la gravedad g de un cuerpo es variable, como se ha dicho antes, y la misma decrece a medida que el cuerpo se aleja de la superficie de la Tierra, como se puede observar en el siguiente análisis. Sea un cuerpo de masa m , situado a una distancia h sobre la superficie de la Tierra. La distancia d del centro de la Tierra al cuerpo será:

$$d = R + h$$

La relación (11.6) se puede escribir, para este caso en particular, como:

$$F_g = G \frac{m \cdot M}{(R + h)^2}$$

Como $F_g = mg$, podemos escribir:

$$mg = G \frac{m \cdot M}{(R + h)^2} \Rightarrow g = G \frac{M}{(R + h)^2} \quad (11.9)$$

De esta ecuación se puede advertir que g disminuye a medida que h aumenta, lo que quiere decir que el peso, o fuerza de atracción gravitatoria de la Tierra sobre el cuerpo, va igualmente disminuyendo. Cuando la distancia relativa de este cuerpo a la Tierra o a cualquier otro cuerpo sideral sea lo suficientemente grande, el peso del mismo será igual a cero. Su masa, sin embargo, permanecerá inalterada. Si el cuerpo en consideración posee una masa muy grande y a alguien, pensando en la ausencia de peso, se le ocurre darle un puntapié con la intención de aventarlo muy lejos, posiblemente resultará seriamente lesionado y, tal vez, no consiga moverlo.

Como en la relación (11.9) la unidad de la constante G se expresa en Nm^2/kg^2 y las unidades de M y $(R + h)$ están en kg y metros (m), respectivamente, la aceleración queda expresada en términos de N/kg . Esta forma de representación de g expresa la fuerza gravitatoria por unidad de masa de la Tierra sobre un cuerpo y se le denomina *intensidad del campo gravitatorio*, el cual se manifiesta en cada punto del espacio alrededor de la Tierra.

Ejemplo 11.3

La distancia media entre la Tierra y la Luna es de $384 \cdot 10^3 \text{ km}$. Determina la fuerza de atracción gravitatoria entre ellas, si sus masas son $6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ y $7,4 \cdot 10^{22} \text{ kg}$, respectivamente.

Solución

Haciendo uso de la relación (11.6), se tiene:

$$\begin{aligned} F &= G \frac{m_T m_L}{d^2} = \\ &= 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \frac{(6 \cdot 10^{24}) \cdot (7,4 \cdot 10^{22}) \text{ kg}^2}{(3,84 \cdot 10^8)^2 \text{ m}^2} = \\ &= 20,08 \cdot 10^{19} \text{ N} \end{aligned}$$

Observa el valor tan grande de esta fuerza de atracción. Cabe preguntarse: bajo esa condición, ¿por qué no se produce el choque entre la Tierra y la Luna?

Ejemplo 11.4

Determina la aceleración gravitatoria de un objeto que descansa sobre la superficie lunar y compara este valor con el de la atracción gravitatoria del mismo objeto sobre la superficie terrestre. La masa de la Luna es $7,4 \cdot 10^{22} \text{ kg}$ y el radio promedio es de $1.736,6 \text{ km}$.

Solución

Utilizando la relación (11.8):

$$\begin{aligned} g_L &= G \frac{M}{R^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2} \frac{7,4 \cdot 10^{22} \text{ kg}}{(1.736,6 \cdot 10^3)^2 \text{ m}^2} = \\ &= 1,64 \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 1,64 \frac{\text{kg m}}{\text{kg s}^2} = 1,64 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

La aceleración gravitatoria en la superficie terrestre es igual a $9,8 \text{ m/s}^2$. Por tanto, la relación con el valor en la superficie lunar es:

$$\frac{g_T}{g_L} = \frac{9,8 \text{ m/s}^2}{1,64 \text{ m/s}^2} = 5,98 \Rightarrow g_T = 5,98 g_L$$

expresión que indica que la aceleración gravitatoria en la superficie terrestre es, aproximadamente, igual a 6 veces la aceleración en la superficie lunar. Esto también significa que un objeto en la Tierra pesa alrededor de 6 veces su valor en la Luna.

11.6 MASA INERCIAL Y MASA GRAVITACIONAL

Hemos estudiado con detalles el concepto de masa inercial o masa inerte, como también se le suele llamar. Allí se estableció que la masa inercial es la medida de la inercia de los cuerpos o, dicho en otras palabras, es la medida de la resistencia al cambio del estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme de un cuerpo. Allí también se hizo una descripción sobre el método del cálculo de la masa de un cuerpo, partiendo de una masa patrón conocida y de las aceleraciones, tanto del cuerpo cuya masa queremos calcular, como de la aceleración de la masa patrón. El cálculo de la masa, obtenido de esta manera, se lleva a cabo mediante un proceso que es dinámico, ya que, de alguna manera, las masas se aceleran mediante la aplicación de una fuerza. La masa, calculada de esta forma, constituye una medida de la inercia del cuerpo. Es, por lo tanto, una *masa inercial* o *masa inerte*. Observa que, durante este proceso de determinación de la masa, no se hizo ninguna mención a la fuerza gravitacional de la Tierra sobre el cuerpo, es decir, las fuerzas gravitatorias no intervienen para nada en este cálculo.

La masa inercial es la medida de la inercia de los cuerpos o, dicho en otras palabras, es la medida de la resistencia al cambio del estado de reposo o de movimiento rectilíneo y uniforme de un cuerpo.

En la práctica, este método de medir la masa, haciendo acelerar un cuerpo, resulta difícil de realizar. En cambio, utilizando una balanza de brazos iguales, como se muestra en la fig. 11.4, se puede fácilmente obtener la medición de la masa de un cuerpo. Si en uno de los platillos colocamos el cuerpo, cuya masa queremos medir y en el otro vamos colocando masas conocidas, hasta que los brazos queden en equilibrio, tenemos los pesos $P = P_x$ y como el valor de g es igual en ese punto para las masas m y m' , se tiene que:

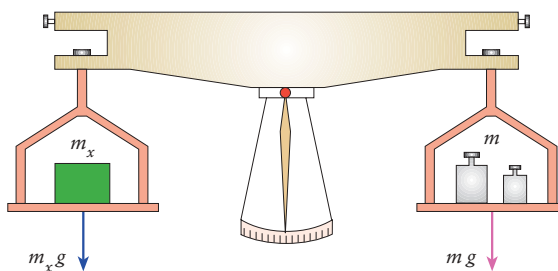


Fig. 11.4 La masa desconocida de un cuerpo, m_x , puede ser medida usando una balanza de brazos iguales. Como g es igual para ambos brazos, $m_x g = mg$ y, por tanto, $m_x = m$.

$$mg = m_x g \quad \Rightarrow \quad m_x = m'$$

con lo cual se mide la masa del cuerpo a través de las masas conocidas.

Este método de medir la masa se ha realizado sin movimiento alguno de la misma. Es, por lo tanto, un procedimiento estático y está basado en la interacción gravitatoria con la Tierra, donde la inercia no ha intervenido para nada. La masa medida de esta manera se denomina *masa gravitacional*. Los dos procedimientos de medir la masa nos indican que los mismos miden dos propiedades diferentes de la materia; es decir, una mide la masa de los cuerpos, acelerándolos, y la otra, mide la masa bajo la acción de la fuerza de la gravedad. Aunque para fines prácticos no hay diferencia entre los dos tipos de masa, la Física clásica, que estamos estudiando, considera que sí existen dos tipos de masa y que la identidad entre las mismas es puramente accidental, sin ningún significado en particular. En cambio, la Física moderna, con Einstein a la cabeza, considera que las dos masas son idénticas y el reconocimiento de este hecho conduce a una comprensión más profunda de la naturaleza. El surgimiento de la Teoría General de la Relatividad tiene, dentro de sus bases principales, la identidad de la masa gravitacional y la masa inercial. La explicación de por qué los cuerpos, cualquiera que sea su peso, caen con igual aceleración en ausencia de aire, se fundamenta en el hecho de que el peso de los cuerpos es proporcional a su masa. Es decir, si un cuerpo A en caída libre es tres veces más pesado que el cuerpo B, su masa es tres veces mayor, pero el cuerpo A tiene una inercia tres veces mayor, por lo que necesita una fuerza tres veces mayor para

adquirir la misma aceleración. En fórmulas, se tiene que para el cuerpo A:

$$3mg = 3P \quad \Rightarrow \quad g = \frac{3P}{3m} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{P}{m}$$

Para el cuerpo B se tiene:

$$g = \frac{P}{m}$$

lo cual demuestra que, cualquiera que sea el peso de los cuerpos, ellos caen con la misma aceleración. Esto significa que si dos objetos son soltados desde la misma altura, además de llegar al suelo con similar aceleración, llegarán al mismo tiempo.

11.7 PESO E INGRAVIDEZ APARENTE

Todo cuerpo que interactúa con la Tierra es atraído por ella con una fuerza que, en la Física, se conoce como el peso del cuerpo. Este concepto del peso de los cuerpos fue estudiado en la sección (11.5). En esta sección se menciona para introducir los conceptos de peso e ingravidez aparentes.

Es importante recordar que la aceleración de la gravedad, g , como toda aceleración, mide la tasa de cambio de la velocidad, con relación al tiempo (m/s^2), con la que cae un cuerpo, cuando éste es soltado desde cualquier altura sobre la Tierra. Esta aceleración es producida, evidentemente, por la fuerza de la gravedad ejercida por la Tierra sobre el cuerpo. Como siempre estamos pegados a la Tierra, en la vida cotidiana interpretamos la gravedad como algo que nos mantiene unidos a ésta y no como algo que nos produce una aceleración. A esa sensación que sentimos de estar pegados a la Tierra es lo que denominamos *peso*.

Para medir el peso de una persona, normalmente usamos una báscula. Si nos paramos sobre una báscula común y corriente, la fuerza con la cual la Tierra nos atrae, hace que presionemos hacia abajo la báscula al igual que al piso donde ésta descansa. Por la tercera ley de Newton, la báscula y el piso reaccionan con una fuerza igual hacia arriba. Los resortes de la báscula sufren la compresión de estas fuerzas de acción-reacción, efecto que es observado en una escala y que corresponde al peso de la per-

sona que se ha ubicado sobre la báscula.

Ahora bien, si este proceso de medida de la báscula, que se ha descrito, se realiza dentro de un ascensor, se puede constatar que si el ascensor se mueve con velocidad constante, el peso de la persona es igual al que se tomó fuera del ascensor. En cambio, si el ascensor se mueve con movimiento acelerado hacia arriba, se nota que el peso aumenta; es decir, que la fuerza de reacción de la superficie de la báscula donde está parado aumenta y si éste se mueve hacia abajo con cierta aceleración, el peso disminuye o, lo que es lo mismo, la fuerza de reacción disminuye. El peso real de la persona sigue siendo igual a la fuerza de atracción gravitatoria, es decir $p = mg$, pues este no depende de la aceleración del ascensor. Sin embargo, como vemos que la báscula indica más peso cuando el ascensor acelera hacia arriba o menos peso cuando el ascensor acelera hacia abajo, hablamos de un *peso aparente* del cuerpo acelerado. Podemos definir, entonces, al peso aparente de un cuerpo de la siguiente manera:

El peso aparente de un cuerpo, cuando el mismo se mueve en el espacio con un movimiento acelerado, es la fuerza resultante que ejerce sobre éste la superficie sobre la cual descansa.

Ejemplo 11.5

La fig. 11.5 muestra el caso de un bloque de masa igual a 75 kg, sobre una balanza de resortes, dentro de un ascensor que acelera hacia arriba con una aceleración de magnitud $a = 1,5 \text{ m/s}^2$. Determina el peso aparente del bloque.

Solución

Las fuerzas que actúan sobre el bloque son: la normal $\vec{N}$, ejercida por el plato de la balanza sobre el cual aquel está colocado y la fuerza de la gravedad $\vec{P}$, ejercida por la Tierra. La fuerza normal $\vec{N}$, que mide la balanza, es el peso aparente de la persona, de acuerdo con la definición que se ha dado de este concepto.

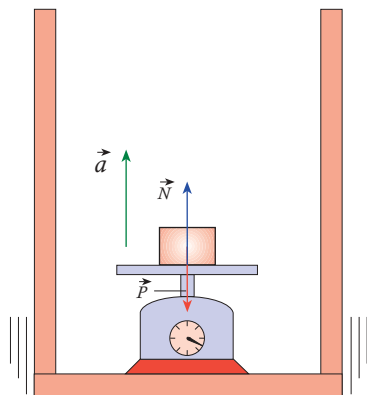


Fig. 11.5 Ejemplo 11.5.

Según la segunda ley de Newton, se tiene:

$$\vec{N} + \vec{P} = m\vec{a}$$

Antes de iniciar el movimiento el ascensor, cuando la aceleración es cero, se cumple la siguiente relación: $\vec{N} = -\vec{P}$ ($N = P$), y si el ascensor se desplazara con velocidad constante, tendríamos también que $\vec{N} = -\vec{P}$ ($N = P$). En ambos casos, el peso aparente es igual al peso real del bloque. Si expresamos $\vec{N}$, $\vec{P}$ y $\vec{a}$ en terminos de los vectores unitarios $\vec{i}$ y $\vec{j}$, tendremos:

$$N\vec{j} - P\vec{j} = m\vec{a}\vec{j} \Rightarrow N = ma + mg \Rightarrow N = m(a + g)$$

donde se ha eliminado el vector unitario $\vec{j}$ por ser un elemento común de todos los términos de la relación. El módulo de la fuerza normal, N , corresponde al valor que marca la balanza y es, por tanto, el peso aparente del bloque. Sustituyendo los valores dados:

$$N = 75 \text{ kg} \cdot (9,8 + 1,5) \text{ m/s}^2 = 847,50 \text{ newtons}$$

El peso del bloque sin aceleración está dado por:

$$N' = 75 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 = 735 \text{ newtons}$$

El cambio porcentual en el peso del bloque es:

$$\Delta(\%) = \frac{847,50 - 735}{735} = 15,31 \%$$

Es decir, el bloque aparenta pesar un 15,31 % más cuando el ascensor acelera hacia arriba con $a = 1,5 \text{ m/s}^2$.

En el caso que el ascensor acelere hacia abajo, el peso aparente del bloque es menor que su peso real. Si se produjera la situación de que las guayas del ascensor se rompieran, el ascensor entraría en caída libre y, por lo tanto, $g = a$. Se tendría entonces que $N = 0$ y una persona dentro del ascensor aparentemente no tendría peso y, por lo tanto, flotaría. Es importante recordar que la persona continúa teniendo su peso real, dado por la fuerza de atracción de la Tierra. La ingravidez que siente la persona no es debido a una ausencia de la gravedad, sino a una ausencia de una fuerza que la soporte. Esta condición descrita para un ascensor con movimiento acelerado es la misma que ocurre cuando un satélite es puesto en órbita.

11.8 DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE

El *diagrama de cuerpo libre* es un método de gran utilidad cuando se trata de aplicar las leyes del movimiento de Newton al análisis y solución de cualquier problema de mecánica. Con el fin de comprender con facilidad la esencia de ese método, es importante recordar lo siguiente:

La manera cómo un cuerpo interactúa físicamente con otro es a través de una fuerza, entendida ésta como una medida de las interacciones entre los cuerpos u objetos. Esto implica la presencia de dos cuerpos. Entonces, cuando dos o más cuerpos interactúan, lo hacen siempre a través de fuerzas y tales fuerzas responden a cualquiera de los dos tipos ya estudiados: de contacto y de campo. Del primer tipo se mencionan, para recordar, la fuerza elástica (fuerza de resortes), la fuerza de tensión (fuerza aplicada sobre cuerdas), fuerza de contacto normal (fuerza ejercida por una superficie sobre un cuerpo que descansa sobre ella) y las fuerzas de fricción. Del segundo tipo, se mencionan la fuerza de la gravedad y las fuerzas entre cargas eléctricas. Es importante resaltar, de nuevo, que no existe físicamente una fuerza separada, sino que la existencia de una fuerza es la confirmación de una interacción entre un cuerpo y otro. Finalmente, debemos tener en cuenta, al aplicar el método del diagrama de cuerpo libre, que el cuerpo sobre el cual se aplica debe ser considerado como una partícula, según el concepto establecido sobre este particular y, además, considerar dicho cuerpo como aislado del entorno con el cual esté interactuando y libre de

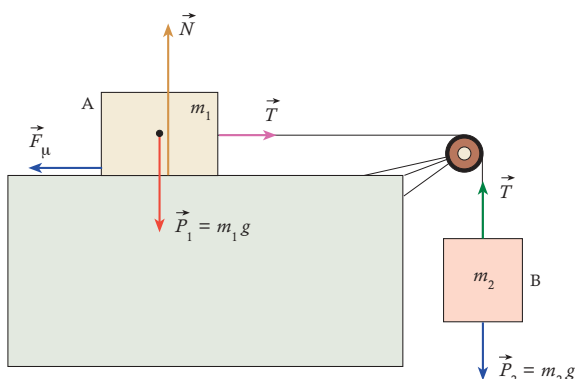


Fig. 11.6 Para obtener información sobre el movimiento de los bloques, es necesario dibujar el diagrama de cuerpo libre de cada bloque en particular. En dichos diagramas se representan las fuerzas que actúan sobre los mismos.

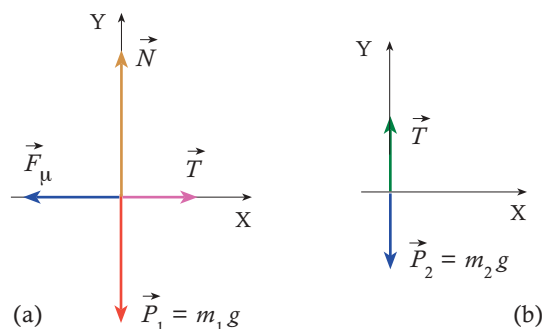


Fig. 11.7 a) Diagrama de cuerpo libre para el bloque A. b) Diagrama de cuerpo libre para el bloque B. En ambos casos, los bloques son tratados como partículas, con las fuerzas aplicadas a sus centros de masa.

moverse por la acción de las fuerzas que sobre el mismo se ejercen.

En la fig. 11.6 se muestra un sistema de dos bloques interconectados que utilizaremos como modelo para construir un diagrama de cuerpo libre, cuyos pasos podrían ser los siguientes:

1. Dibujar un diagrama claro y ordenado para representar la realidad de los cuerpos que intervienen en la interacción física, tal como se muestra en la figura 11.6. En este diagrama deben estar representadas, mediante flechas, todas las fuerzas externas que actúan sobre cada cuerpo: fuerzas de contacto y fuerzas de campo.

2. Asignar un marco de referencia inercial para cada cuerpo, de tal manera que cada uno de estos tenga su propio sistema de coordenadas rectangulares. Se recomienda que la dirección del movimiento de los cuerpos coincida con uno de los ejes coordenados.

3. Aislar el cuerpo, como una partícula, sobre la cual se va a realizar el diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas externas que actúan sobre la partícula deben tener su punto de aplicación en el origen del sistema de coordenadas asignado, cuidando de que si existe una fuerza

resultante, la misma apunte en la dirección de uno de los ejes coordenados, para que el movimiento del cuerpo siga la misma dirección de este eje, como se muestra en la fig. 11.7. Observa que se debe hacer un diagrama de cuerpo libre independiente para cada cuerpo que interviene en un problema.

4. Cualquier fuerza que actúe sobre el cuerpo, cuya dirección no coincida con alguno de los ejes, debe descomponerse en sus componentes según los ejes X y Y. Esto quiere decir que la segunda ley de Newton, expresada en su forma general como $\sum \vec{F} = m\vec{a}$, se aplicará en sus componentes:

$$\sum F_x = ma_x \quad \sum F_y = ma_y$$

5. Resolver estas ecuaciones para determinar los valores de las incógnitas del problema.

Los pasos anteriores nos permiten determinar los valores de las incógnitas involucradas en el movimiento de los bloques que conforman el sistema.

Ejemplo 11.6

La fig. 11.8 muestra un cuerpo A sobre una superficie horizontal rugosa, conectado al cuerpo B a través de una cuerda de masa despreciable, la cual pasa por una polea sin fricción. El sistema de los dos cuerpos conectados se desliza por la acción de una fuerza de 70 N, aplicada sobre el cuerpo A en un ángulo de 30° con la horizontal. El coeficiente de fricción dinámico entre el cuerpo A y la superficie horizontal es $\mu_d = 1$. Si la masa del cuerpo A es de 5 kg y la del cuerpo B es de 3 kg, determina la aceleración del sistema de los dos cuerpos conectados y la tensión de la cuerda.

Solución

La fig. 11.9 muestra los diagramas de cuerpo libre para cada bloque. En dichos diagramas se muestran las fuerzas externas que actúan sobre cada cuerpo y la dirección de esas fuerzas, aplicadas en el origen de los sistemas de coordenadas. Aplicando la segunda ley de Newton al diagrama de cuerpo libre de la fig. 11.9(a):

$$\sum F_x = F \cos 30^\circ - F_\mu - T = m_1 a \quad (11.10)$$

$$\sum F_y = F \sin 30^\circ + N - m_1 g = 0 \quad (11.11)$$

Similarmente, aplicando la segunda ley de Newton al diagrama de cuerpo libre de la fig. 11.9(b), se obtiene:

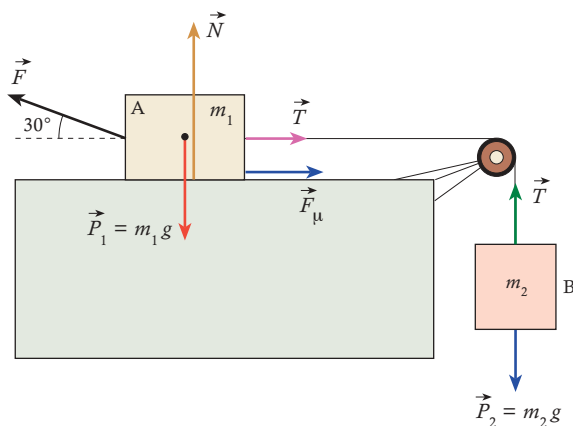


Fig. 11.8 Ejemplo 11.6.

$$\sum F_x = 0 \quad (11.12)$$

$$\sum F_y = T - m_2 g = m_2 a \quad (11.13)$$

Despejando T de la relación (11.13), N de la (11.11) y, teniendo en cuenta que $F_\mu = \mu_d N$, podemos expresar la relación (11.10) como:

$$F \cos 30^\circ - \mu_d (m_1 g - F \sin 30^\circ) - m_2 (a + g) = m_1 a \quad (11.14)$$

Para despejar a se reagrupan términos con el siguiente resultado:

$$a = \frac{F(\cos 30^\circ + \mu_d \sin 30^\circ) - g(\mu_d m_1 + m_2)}{m_1 + m_2} \quad (11.15)$$

Sustituyendo valores se obtiene el módulo de a :

$$a = \frac{70 \text{ N} \cdot (\cos 30^\circ + 1 \cdot \sin 30^\circ) - 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot (1 \cdot 5 \text{ kg} + 3 \text{ kg})}{5 \text{ kg} + 3 \text{ kg}} = 2,15 \text{ m/s}^2$$

Para calcular la tensión en la cuerda, hacemos uso de la relación (11.13):

$$T = m_2 (g + a) = 3 \cdot (9,8 \text{ m/s}^2 + 2,15 \text{ m/s}^2) = 38,40 \text{ N}$$

El módulo de $\vec{a}$, en este caso, cuando la magnitud de la fuerza aplicada es de 75 newtons, está precedido de signo positivo. En general, dependiendo del signo del numerador de (11.15), la aceleración estará precedida con signo positivo o negativo. Si el signo es negativo, el sistema se moverá

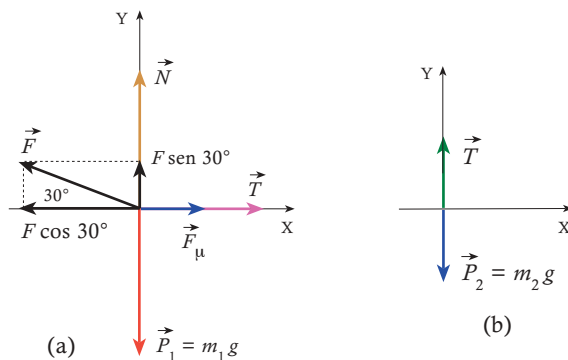


Fig. 11.9 Diagramas de cuerpo libre para los bloques del ejemplo 11.6.

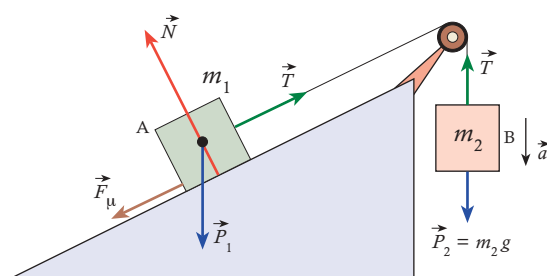


Fig. 11.10 Fuerzas actuantes sobre el sistema de dos bloques: uno, que descansa sobre un plano, y otro que, atado al primero, cuelga libremente

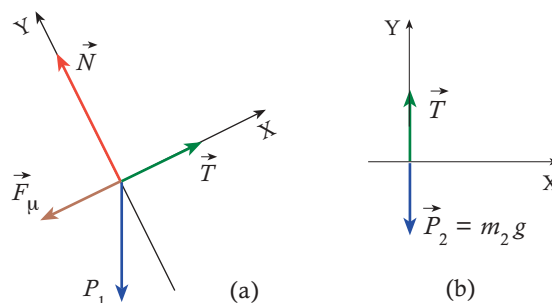


Fig. 11.11 Diagramas de cuerpo libre para los bloques de la fig. 11.10.

en sentido contrario al supuesto. En este caso, la fuerza de fricción cinética deberá cambiar su dirección en el diagrama de cuerpo libre. Observa también que la componente $F_y = F \sin 30^\circ$, como hala el cuerpo hacia arriba, hace que la fuerza de fricción sea menor y el cuerpo pueda deslizarse más fácilmente.

Ejemplo 11.7

A continuación se muestra un conjunto de sistemas mecánicos, con sus respectivos diagramas de cuerpo libre, con el fin de que el estudiante pueda detallarlos minuciosamente y le sirvan de guía para construir correctamente diagramas de cuerpo libre de cualquier sistema mecánico que necesite analizar y calcular. Es importante destacar que la aplicación de las leyes del movimiento de Newton, requiere que seamos capaces de determinar con precisión todas las fuerzas externas, que actúan sobre cada uno de los componentes o cuerpos de cualquier sistema mecánico que se esté analizando. Hay que tener presente que a cada uno de los componentes o cuerpos de un sistema, se le debe construir su diagrama de cuerpo libre independiente.

En la fig. 11.10 se muestra un bloque de masa m_1 descansando sobre un plano inclinado, y atado, mediante una cuerda y una polea sin rozamiento, a otro bloque de masa m_2 , que cuelga libremente. Dependiendo de las masas de los bloques, el conjunto se moverá hacia arriba o hacia abajo sobre el plano inclinado. Sobre el bloque de masa m_1

actúan la fuerza de gravedad (peso), la fuerza normal ejercida por el plano, la tensión de la cuerda y la fuerza de fricción. Sobre el bloque que cuelga actúan la fuerza de gravedad y la tensión de la cuerda. En la fig. 11.11 se muestra el diagrama de cuerpo libre para cada uno de los bloques. A partir de estos diagramas, se aplica la segunda ley de Newton para determinar la dinámica del sistema. Es decir, se pueden calcular la aceleración y la tensión en la cuerda, entre otras cantidades.

En la fig. 11.12 se muestra el diagrama de cuerpo libre de un bloque sujeto a dos cuerdas.

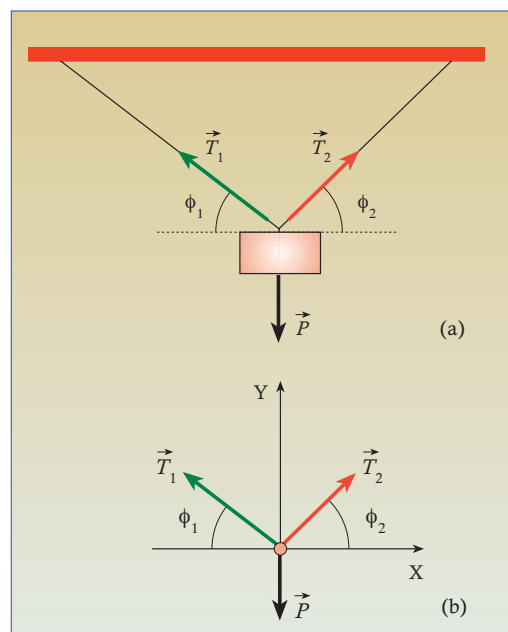


Fig. 11.12 Diagrama de cuerpo libre para un bloque que cuelga atado a dos cuerdas.

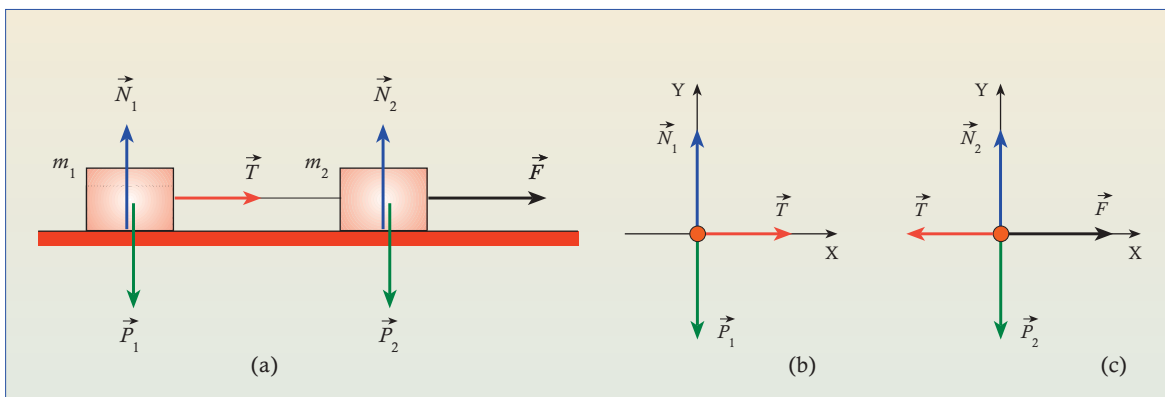


Fig. 11.13 a) La fuerza de magnitud F produce el movimiento de los bloques. b) Diagrama de cuerpo libre del bloque de masa m_1 . c) Diagrama de cuerpo libre del bloque de masa m_2 .

Finalmente, en la fig. 11.13 se muestran dos bloques conectados mediante una cuerda que se desliza en un plano, cuando se aplica una fuerza $\vec{F}$.

aplicadas a cada uno de los bloques. El conjunto, dado que está conectado por una misma cuerda, se mueve con la misma aceleración. Usaremos las expresiones:

$$\sum \vec{F}_y = m\vec{a}_y \quad \sum \vec{F}_x = m\vec{a}_x$$

para escribir las ecuaciones que nos permitan determinar las cantidades desconocidas. Como puedes ver, se trata de relaciones vectoriales, que podrían dar origen a relaciones escalares, de más fácil manejo. Para ambos bloques, supondremos que las fuerzas están aplicadas en el centro de masa. En el caso del bloque de masa m_1 , se dibujó la fuerza de roce en el límite entre el mismo y la superficie del plano, pero debe entenderse que todas las fuerzas confluyen en el centro. Asimismo, supondremos que un sistema de coordenadas cartesianas se superpone en los diagramas de cuerpo libre, con el eje Y vertical y el eje X horizontal, con respecto a la página. El bloque A se mueve hacia arriba sobre el plano

Ejemplo 11.8

La fig. 11.14 corresponde a 2 bloques, unidos mediante una cuerda que pasa por una polea. El conjunto se mueve hacia abajo y el coeficiente de roce dinámico entre el bloque de masa m_1 y el plano es $\mu_d = 0,5$. Si $m_1 = 4 \text{ kg}$ y $m_2 = 10 \text{ kg}$. Determina la aceleración del conjunto y la tensión en la cuerda.

Solución

Los diagramas de los bloques A y B se presentan en la fig. 11.15. Haremos un análisis de las fuerzas

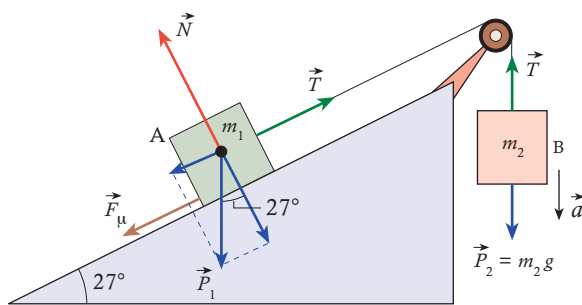


Fig. 11.14 Ejemplo 11.8. Observa que el ángulo del plano inclinado (27°) es el mismo ángulo entre el peso P_1 y la componente vertical de aquél.

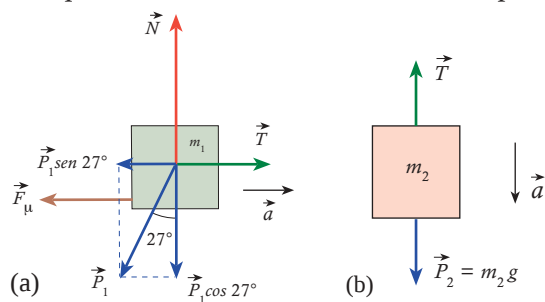


Fig. 11.15 Ejemplo 11.8. a) Fuerzas que actúan sobre el bloque de masa m_1 . b) Fuerzas que actúan sobre el bloque de masa m_2 .

inclinado. Para mejor comprensión del diagrama de cuerpo libre, hemos girado al bloque A un ángulo de 27° , tal como se muestra en la fig. 11.15 (a).

Bloque A:

Fuerzas en la dirección vertical

$$\vec{P}_1 \cos 27^\circ = -P_1 \cos 27^\circ \vec{j} = -m_1 g \cos 27^\circ \vec{j} \quad \vec{N} = N \vec{j}$$

Como la aceleración en la dirección vertical es nula, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}_y &= N \vec{j} - m_1 g \cos 27^\circ \vec{j} = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow N - m_1 g \cos 27^\circ = 0 \end{aligned}$$

Observa que se ha eliminado el vector unitario $\vec{j}$ por aparecer en todos los términos. Sustituyendo valores, calculamos el módulo de la fuerza normal al plano:

$$N = m_1 g \cos 27^\circ \Rightarrow N = 4 \cdot 9,8 \cdot 0,89 = 34,89 \text{ N}$$

Fuerzas en la dirección horizontal. El valor de N , nos permite determinar la fuerza de rozamiento:

$$\vec{F}_\mu = -\mu_d \cdot N \vec{i} = -0,5 \cdot 34,89 \vec{i} = -17,45 \vec{i}$$

La suma vectorial de las fuerzas en la dirección horizontal está dada por:

$$\sum \vec{F}_x = \vec{T} + \vec{P}_1 \sin 27^\circ + \vec{F}_\mu = m_1 \vec{a} \Rightarrow$$

Eliminando el vector unitario $\vec{i}$ y haciendo operaciones, obtenemos:

$$T - m_1 g \sin 27^\circ - 17,45 = 4a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T - 4 \cdot 9,8 \cdot 0,45 - 17,45 = 4a$$

$$T - 17,64 - 17,45 = 4a \Rightarrow T - 4a = 35,09 \quad (1)$$

Bloque B:

Como no hay aceleración en el eje horizontal, tomaremos sólo en consideración las fuerzas según el eje Y. El bloque B está sometido a la acción de la tensión de la cuerda y a la fuerza de atracción que

sobre él ejerce la Tierra (peso). La relación vectorial que describe a las fuerzas aplicadas es:

$$\vec{T} + \vec{P}_2 = m_2 \vec{a} \Rightarrow T \vec{j} - m_2 g \vec{j} = -m_2 a \vec{j}$$

Eliminando el vector unitario $\vec{j}$ y efectuando operaciones:

$$T - m_2 g = -m_2 a \Rightarrow T - 10 \cdot 9,8 = -10a$$

$$\Rightarrow T + 10a = 98 \quad (2)$$

Restando las ecuaciones (1) y (2), obtenemos el valor de la aceleración:

$$10a + 4a = 62,91 \Rightarrow 14a = 62,91$$

$$a = \frac{62,91}{14} = 4,49 \text{ m/s}^2$$

Finalmente, a partir de cualesquiera de las dos ecuaciones anteriores, determinamos la tensión en la cuerda:

$$T = 98 - 10a = 98 - 44,90 = 53,10 \text{ N}$$

11.9 MARCOS DE REFERENCIA INERCIALES Y NO INERCIALES

Para entender con facilidad el concepto de *marcos de referencia inerciales*, debemos recordar lo estudiado sobre marcos de referencia en capítulos anteriores. Allí se aprendió que la descripción del movimiento de un cuerpo, tanto para indicar simplemente su posición en un momento dado como su velocidad, debemos hacerla, necesariamente, refiriéndola a otro cuerpo o, más comúnmente, a un punto que puede estar en reposo o en movimiento.

El cuerpo o punto al cual debemos referirnos cuando vamos a describir el movimiento de un cuerpo, se conoce como *marco de referencia*. Así, cuando decimos que una persona se desplaza en un automóvil a una velocidad de 80 km/h, debemos entender que esta velocidad está medida en relación, bien al sitio desde donde partió o bien a la carretera por donde circula. Cualesquiera de estos

dos puntos de referencia para describir la velocidad del automóvil son un ejemplo correcto de un marco de referencia. El hecho de tener que fijar un marco de referencia para describir físicamente el movimiento de un cuerpo, nos lleva a admitir que *el movimiento de los cuerpos es relativo*. Es decir, el movimiento de los cuerpos es posible describirlo correctamente sólo con relación a un cuerpo o punto fijo o móvil. Recordados estos conceptos, podemos ya considerar lo que se entiende por *marcos de referencia inerciales*.

Cuando se introdujo el concepto de marco de referencia, se afirmó que podía ser tanto un punto fijo como un objeto o punto en movimiento. En cuanto a un punto u objeto en movimiento, no se dijo nada acerca de si el movimiento del marco era a velocidad uniforme o era con movimiento acelerado. Esta distinción del tipo de movimiento del marco desde el cual podemos describir el movimiento de un cuerpo, es importante tenerla en cuenta, porque *las leyes de Newton no son aplicables en un marco de referencia acelerado*.

La fig. 11.16 muestra un punto de la vía férrea de un vagón que se ha elegido como marco de referencia inercial, S , en un eje de coordenadas cartesianas. El vagón, que se mueve sobre el eje de las X con velocidad constante v , se elige como un sistema

inercial S' con sus coordenadas X' , Y' . Este sistema inercial S' es fijo con relación al vagón, pero móvil con relación al sistema inercial S .

Si en el techo del vagón se suspende una pelota de masa m , mediante una cuerda en la cual se produce una tensión T , una persona parada al borde de la vía, como parte del marco de referencia S , verá que la pelota cuelga de la cuerda verticalmente y que la misma se mueve a velocidad constante, igual a la del vagón. Una persona dentro del vagón, como parte del marco S' , verá que la pelota cuelga, también, verticalmente y que la misma se mantiene en estado de reposo respecto del marco S' . No obstante que la persona dentro del vagón se mantiene en estado de movimiento uniforme respecto a la persona parada al borde de la vía, ambas personas estarán de acuerdo en que ninguno de ellos observa cambios en el estado de movimiento de la pelota; es decir, que sobre la pelota no está actuando ninguna fuerza. La persona parada fuera del vagón siempre verá la pelota moviéndose a velocidad constante e igual a la del vagón y la persona dentro del vagón verá también que la misma permanece siempre en su sitio; es decir, en reposo. Como consecuencia, ambas personas estarán también de acuerdo que sobre la pelota no actúa ninguna fuerza y, por lo tanto, la primera ley de Newton se cumple perfectamente.

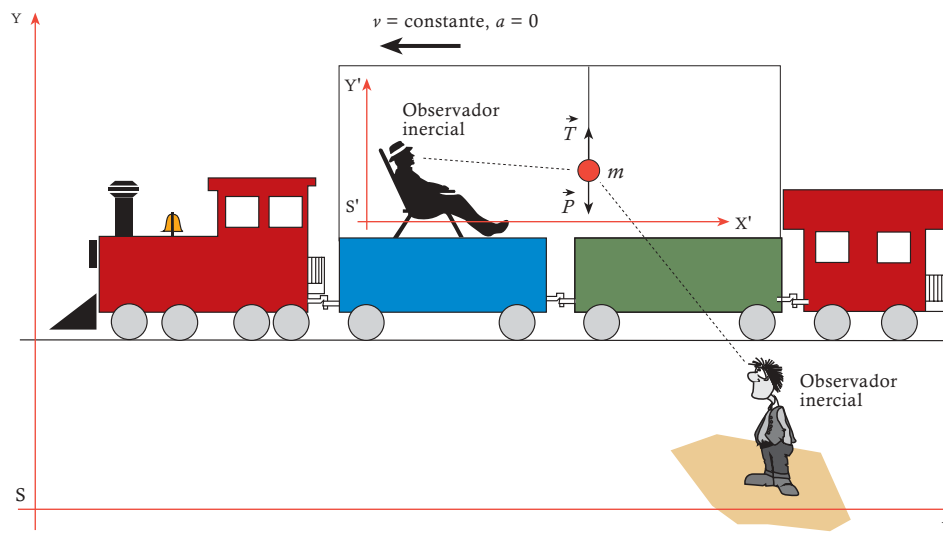


Fig. 11.16 El observador inercial, al borde de la vía, ve que la pelota se mueve a la misma velocidad constante que la del vagón. El observador, también inercial, dentro del vagón, verá que la pelota se mantiene vertical y en reposo. Ambos observadores están de acuerdo que la Primera Ley de Newton se cumple para el movimiento de la pelota.

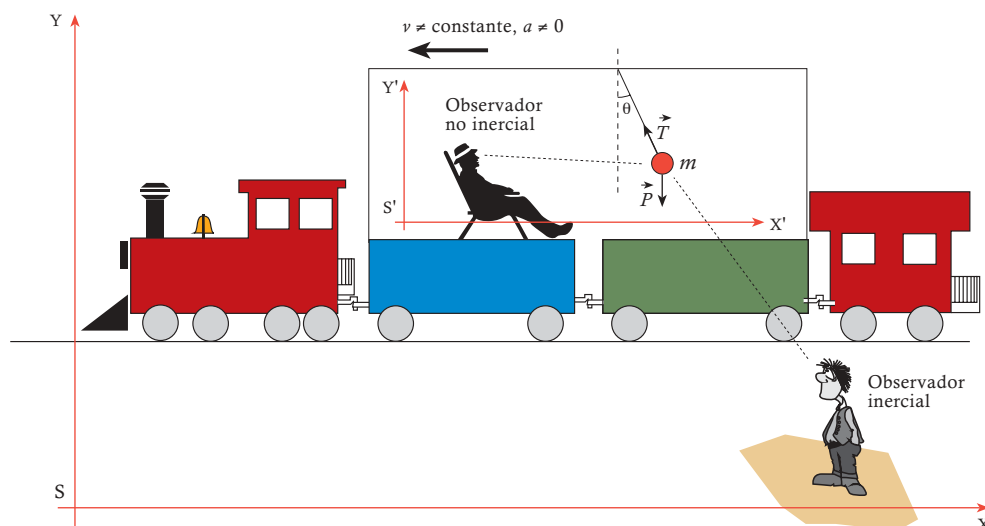


Fig. 11.17 Al acelerar el vagón, la pelota forma un ángulo θ con respecto a la vertical. El observador inercial, parado en la vía, sostiene que la pelota acelera debido a la componente horizontal de T . El observador no inercial, que está dentro del vagón, afirma que la pelota está en reposo y que, por lo tanto, no se ejerce ninguna fuerza sobre la misma. Esto, a pesar de que la pelota se mantiene desviada, formando un ángulo con la vertical. El observador no inercial no puede explicar esta situación aplicando la primera ley de Newton, porque los cuerpos, en marcos de referencia no inerciales, no siguen esta ley.

Si el vagón comienza a acelerar, como se muestra en la fig. 11.17, la persona al borde de la vía u observador inercial, verá que la cuerda de la pelota se abre un ángulo θ con relación a la vertical y que la misma se mueve con una aceleración que, con respecto del sistema de referencia S , es igual a la aceleración del vagón.

Si el observador inercial analiza las fuerzas que actúan sobre la pelota, verá que tales fuerzas son la ejercida por la tensión $\vec{T}$ de la cuerda y la fuerza de la gravedad o peso $\vec{P}$ de la pelota. Si se descompone la fuerza de tensión $\vec{T}$ en sus componentes rectangulares se verá que la aceleración de la pelota es debida a la componente rectangular en la dirección X y que la componente, según el eje Y , equilibra la fuerza de la gravedad o peso. El observador inercial concluye que la primera ley de Newton se aplica correctamente para este caso. En cambio, la persona que va en el vagón dentro del marco no inercial S' , es decir, el observador no inercial, nota que la cuerda mantiene hacia atrás el ángulo θ con la vertical, que la pelota, sin embargo, está en reposo y, por lo tanto, su aceleración es cero.

Al analizar esta situación, el observador no inercial

se da cuenta que si la pelota está en reposo, quiere decir que sobre ella no actúa ninguna fuerza, o bien que la resultante de un conjunto de fuerzas que actúan sobre la pelota es cero, pero como la misma está formando un ángulo con la vertical, él piensa que algo debe estar actuando para que esto ocurra. Sin embargo, como físicamente no existe la acción de una fuerza que mueva hacia atrás la pelota y la mantenga fija en reposo, él concluye que la primera ley de Newton no es válida en este marco de referencia.

Cuando el marco de referencia es acelerado respecto a un marco de referencia inercial, la primera ley de Newton no es válida en ese marco acelerado, porque implica la acción de una fuerza que no existe. A estos marcos de referencia acelerados se les denomina marcos de referencia no inerciales.

La Tierra es un ejemplo de un marco de referencia no inercial. Con su movimiento de rotación alrededor de su eje y su revolución alrededor del Sol, cambia continuamente la dirección de estas velocidades, dando lugar, por tanto, a movimientos acelerados. Por consiguiente, cualquier marco de

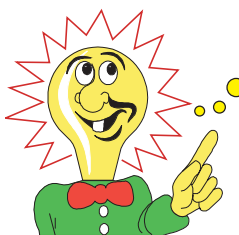
referencia sobre su superficie será, desde el punto de vista de la Física, un marco de referencia no inercial. Sin embargo, debido a que las aceleraciones generadas por estos movimientos de la Tierra son pequeñas (la aceleración centrípeta de un punto sobre el ecuador de la Tierra debido al movimiento de ésta alrededor de su eje es, aproximadamente, igual a $3,81 \cdot 10^{-2} \text{ m/s}^2$, mientras que su aceleración centrípeta alrededor del Sol es, aproximadamente, igual a $4,4 \cdot 10^{-3} \text{ m/s}^2$), normalmente, para propósitos prácticos, se toma a la Tierra como un marco de referencia inercial.

Son, también, marcos de referencia no inerciales, cualquier auto que toma una curva o que frena para estacionarse. Igualmente, un avión que levanta vuelo, mientras adquiere su velocidad de crucero, es un marco de referencia no inercial. Desde un punto de vista estricto de la Física, realmente no se puede afirmar, en forma definitiva, la existencia de marcos de referencia inerciales. Newton sugirió que las estrellas fijas del firmamento, podrían servir de marco de referencia inercial estándar, para propósito del estudio del movimiento normal de los cuerpos en nuestro planeta.

En Física se describen los marcos de referencia no inerciales como aquellos animados de movimiento acelerado, en contraposición a los marcos de referencia inerciales, correspondientes a objetos en reposo o en movimiento rectilíneo uniforme. Si un cuerpo cualquiera se mueve con un movimiento acelerado respecto a un observador inercial, es decir un observador que está en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme, este observador puede afirmar con toda propiedad que la fuerza, o la resultante de todas las fuerzas aplicadas a ese cuerpo, es igual al producto de la masa por la aceleración con que se mueve dicho cuerpo ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$). En cambio, si el cuerpo acelerado es observado por alguien que se mueve conjuntamente con éste, este observador será un observador no inercial y si el mismo trata de aplicar, por ejemplo la segunda ley de Newton al movimiento del cuerpo, tiene que recurrir a plantear la acción de una fuerza ficticia, para que la segunda ley pueda ser válida en este marco de referencia.

Pongamos como ejemplo un caso simple y bastante frecuente: se trata de un autobús con pasajeros, el

cual, al frenar de manera súbita, hace que los pasajeros se sientan empujados bruscamente hacia adelante. Un observador inercial, situado en la acera y que se ha dado cuenta del frenazo, explica que los pasajeros se han inclinado bruscamente debido a la inercia que traían con la velocidad del autobús, el cual, al frenar, ha modificado el estado de movimiento y, por lo tanto, los pasajeros, según la ley de la inercia, tienden a seguir moviéndose en línea recta. Un observador dentro del autobús, que es un observador no inercial, pues el autobús al frenar inicia un movimiento con aceleración negativa, explica que los pasajeros fueron empujados por una fuerza, fuerza cuyo origen él desconoce, pero piensa que debe existir puesto que los pasajeros se movieron hacia adelante. Esta fuerza que el observador cree que existe, es en realidad una invención que le permite explicar el fenómeno. Sin embargo, por ser una fuerza inventada, a dicha fuerza se le conoce en Física como una *fuerza ficticia* y es ficticia porque la misma no tiene un origen físico real. En consecuencia, no tiene una reacción, como lo establece la tercera ley de Newton



De acuerdo con lo descrito antes, podemos afirmar que en cualquier marco de referencia no inercial no sólo la primera ley de Newton no es válida sino que la segunda y la tercera tampoco son válidas.

Haciendo referencia al ejemplo de la fig. 11.18, como una continuación del estudio de los marcos de referencia no inerciales, se puede ver que si el vagón se encuentra en movimiento acelerado, la cuerda de la pelota se abre un ángulo ϕ hacia atrás con relación a la vertical. Si se analiza la inclinación de la cuerda desde el vagón acelerado, se puede pensar que existe una fuerza que mantiene la pelota en reposo en ese punto de inclinación de la cuerda. Pero si la pelota está en reposo respecto del vagón; es decir, su aceleración es cero respecto al mismo, se puede concluir perfectamente que ninguna de las leyes del movimiento de Newton es aplicable en este marco S' de referencia. La primera ley no se aplica, ya que estamos en el caso de un movimiento acelerado del vagón, donde la pelota se ha desplazado en sentido

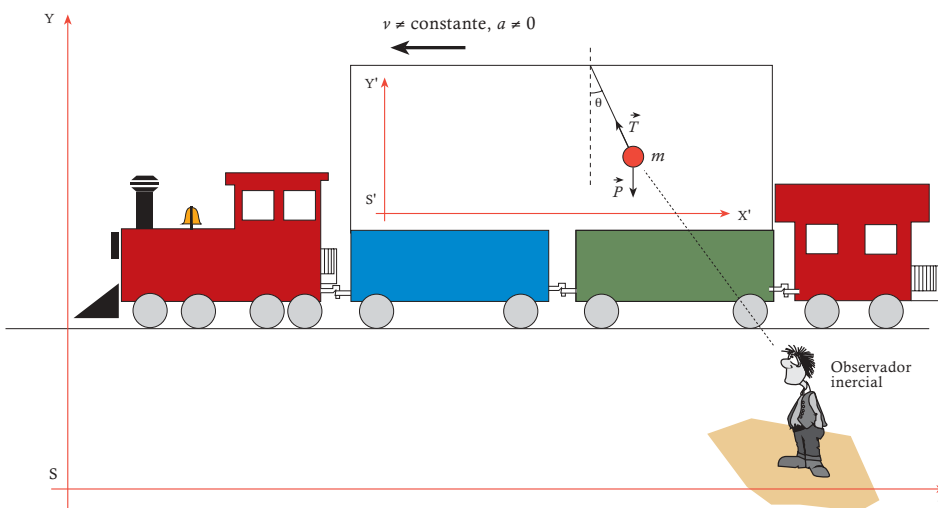


Fig. 11.18 El observador inercial, al borde de la vía, ve que la pelota tiene la misma aceleración que el vagón y, según él, su aceleración se debe a la componente horizontal de la tensión.

contrario al movimiento, sin la aplicación de una fuerza física real. La pelota debería haber permanecido en su sitio sin moverse, ya que según la primera ley, *todo cuerpo permanece en estado de reposo o en estado de movimiento rectilíneo y uniforme, a menos que una fuerza lo obligue a cambiar dicho estado*. La segunda ley tampoco se aplica, ya que al no existir una fuerza física real aplicada sobre la pelota, no existe, por lo tanto, ninguna aceleración sobre la misma, no obstante que ésta se mueve aceleradamente hacia atrás, en respuesta al movimiento acelerado del vagón. La tercera ley igualmente no se aplica, pues al no existir la acción de una fuerza ejercida por alguien o algo sobre la pelota, ésta no puede ejercer una reacción sobre ese alguien o ese algo, como lo exige la tercera ley. El análisis precedente desde el punto de la Física es absolutamente correcto: *las leyes del movimiento de Newton no son válidas en sistemas de*

referencia acelerados o no inerciales.

Sin embargo, mediante la introducción del concepto de fuerzas ficticias, es posible aplicar estas leyes del movimiento en marcos de referencia no inerciales. Las fuerzas ficticias son fuerzas que el observador, en un marco de referencia acelerado, se ve en la necesidad de introducir para poder aplicar las leyes de Newton al movimiento de una partícula dentro de dicho marco. Estas fuerzas ficticias, que parecen reales en el marco de referencia no inercial y que sólo se aplican en este marco, son, sin embargo, inexistentes cuando el movimiento se observa desde un marco de referencia inercial, donde sí son aplicables tales leyes. Para facilitar la comprensión matemática de la aplicación de las leyes de Newton en un marco de referencia no inercial, se hace uso de la fig. 11.19.

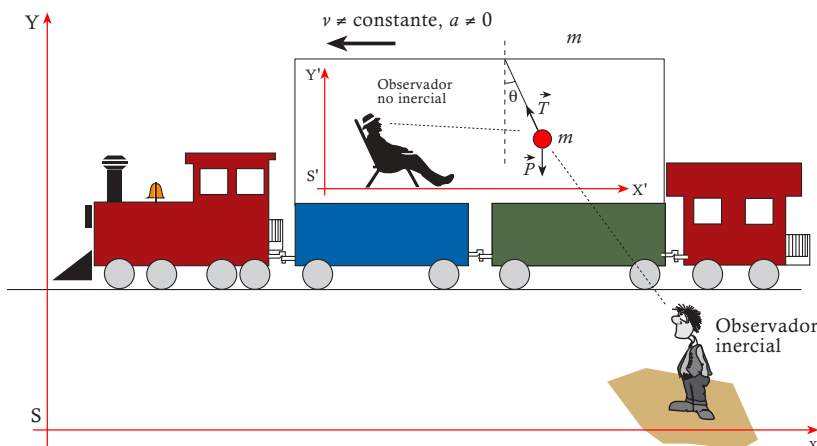


Fig. 11.19 El observador no inercial afirma que sobre la pelota no se ejerce ninguna fuerza, ya que para él la misma está en reposo. La desviación de la cuerda respecto a la vertical es causada por una fuerza ficticia $-ma$, que equilibra la componente horizontal de T .

En esta figura, el observador inercial, que está parado en la acera, ve pasar el vagón con una aceleración de magnitud constante a , respecto a la acera donde él está parado. Para este observador, la aceleración de la pelota es la misma aceleración a que lleva el vagón y la misma la produce la componente horizontal de la tensión $\vec{T}$. Por otra parte, la componente vertical de $\vec{T}$ equilibra el peso mg de la pelota. Si el observador inercial aplica la segunda ley de Newton al movimiento de la pelota, obtiene la siguiente ecuación:

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Si la fuerza de tensión se descompone en sus componentes rectangulares, se obtiene:

$$T \sin \phi = ma \quad T \cos \phi - mg = 0$$

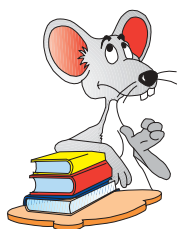
Resolviendo estas dos ecuaciones en términos de la aceleración:

$$a = g \tan \phi$$

El observador no inercial ve que la cuerda continúa manteniendo el ángulo ϕ con la vertical. Ve, además, que la pelota está en reposo, siendo su aceleración, por lo tanto, cero. Para resolver el caso de la inclinación de la pelota, el observador introduce una fuerza ficticia aplicada sobre la pelota en dirección contraria al movimiento del vagón con el fin de equilibrar la componente horizontal de $\vec{T}$, con lo cual la fuerza resultante sobre la pelota es cero. Descomponiendo la tensión $\vec{T}$ como en el caso anterior y aplicando la segunda ley de Newton se tiene:

$$T \sin \phi - ma = 0 \quad T \cos \phi - mg = 0$$

Las ecuaciones obtenidas para ambos casos, como se puede observar, son equivalentes, no obstante que el fenómeno físico del movimiento de la pelota en cada sistema de referencia es interpretado de manera diferente por cada observador.



PIENSA Y EXPLICA



11.1 ¿Por qué se dice que no existen fuerzas aisladas?

11.2 Enuncia la tercera Ley de Newton y explícala usando ejemplos de la vida cotidiana.

11.3 ¿Qué son fuerzas de acción y reacción? En la interacción entre dos cuerpos, ¿puede distinguirse cuál es la fuerza de acción y cuál la de reacción? Explica.

11.4 Se dice que las fuerzas de acción y reacción no se anulan porque están siempre aplicadas a cuerpos diferentes. Explica esta afirmación.

11.5 ¿Es necesaria la presencia de una fuerza para cambiar el estado de movimiento o reposo de un cuerpo? ¿Es necesaria la presencia de una fuerza para mantener a un cuerpo en movimiento?

11.6 ¿Cómo definió Newton el concepto de fuerza?

11.7 Explica qué quería decir Aristóteles cuando afirmaba que el estado normal de los cuerpos era el reposo.

11.8 Haciendo referencia a la fig. 11.3, explica el experimento de Galileo para refutar la teoría de Aristóteles.

11.9 ¿Qué es la inercia de un cuerpo?

11.10 Enuncia la primera ley de Newton.

11.11 Enuncia la segunda ley de Newton y escribe su fórmula matemática, explicando en detalle esta relación.

11.12 ¿Es la dirección del movimiento de un objeto la misma que la de la fuerza aplicada?

11.13 Si sobre un objeto no actúa una fuerza neta, ¿podemos decir que su aceleración será igual a cero?

11.14 Si un cuerpo se mueve sin aceleración, ¿podemos afirmar que sobre el mismo no actúa ninguna fuerza?

11.15 ¿Cómo se define el Newton? ¿Cómo se expresa en unidades del SI?

11.16 Explica la relación (11.8) y por qué la misma establece que la aceleración de gravedad, g , es una constante.

11.17 ¿Es g una constante? Utiliza la relación (11.9) para explicar tu respuesta.

11.18 ¿A qué se denomina intensidad del campo gravitatorio?

11.19 ¿Bajo qué condiciones cuerpos de distintas masas caen hacia la superficie terrestre con la misma aceleración?

11.20 ¿Cuál es la diferencia entre masa inercial y masa gravitacional?

11.21 ¿Qué es un diagrama de cuerpo libre? ¿Podrías enumerar los pasos que hay que dar para dibujar un diagrama de cuerpo libre?

11.22 ¿Qué son marcos de referencia inercial y no inercial?

11.23 ¿Por qué la Tierra es un marco de referencia no inercial? ¿Por qué puede aproximarse como un marco de referencia inercial?

11.24 Si en la figs. 11.16 y 11.17 la pelota no estuviera colgando, sino descansando en el piso del vagón, ¿cuáles serían las percepciones de los observadores?

11.25 ¿Es un vehículo que se mueve a lo largo de una circunferencia un marco de referencia inercial? Explica.

11.26 ¿Es un alcatraz que se lanza a capturar un pez, desde cierta altura, un marco de referencia inercial? Explica.

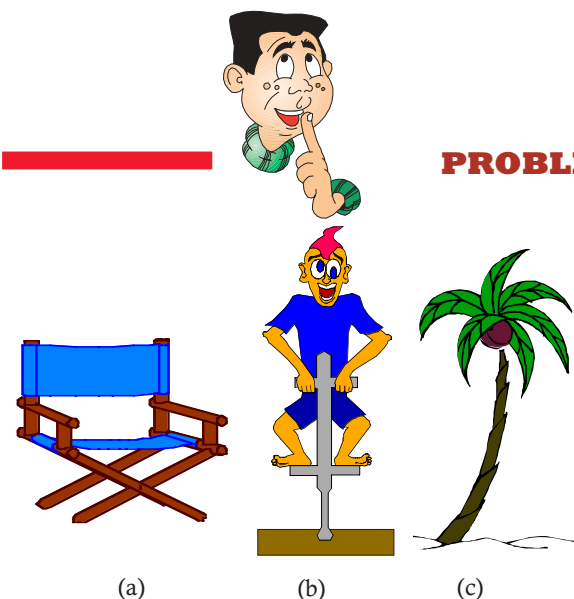


Fig. 11.20 Problema 11.1.

11.1 Identifica las fuerzas de acción y reacción para cada una de las ilustraciones mostradas en la fig. 11.20 y dibuja el diagrama de cuerpo libre, en cada caso.

11.2 Dibuja el diagrama de cuerpo libre para los casos mostrados en la fig. 11.21.

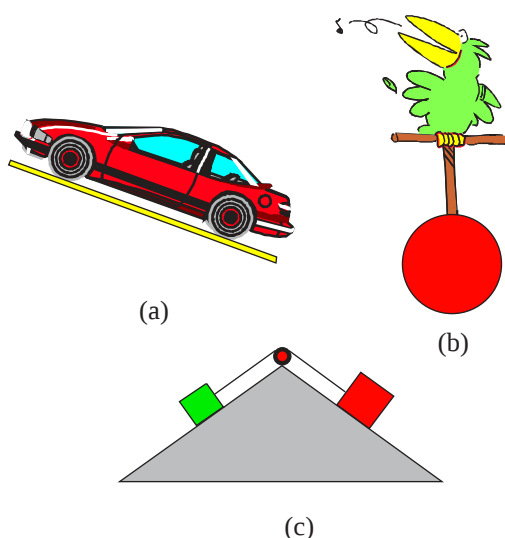


Fig. 11.21 Problema 11.2.

PROBLEMAS

11.3 En la fig. 11.22, un bloque de 20 kg es empujado por una fuerza de 15 N que forma un ángulo de 30° con la horizontal. Luego de 4 s, la velocidad del bloque es de 5 m/s. Determina: **a)** La fuerza de roce que se opone al movimiento. **b)** La fuerza que el plano ejerce sobre el bloque. **c)** La fuerza que ejerce el bloque sobre el plano. **d)** El coeficiente dinámico de rozamiento.

11.4 Un bloque de masa $m_1 = 3$ kg que descansa sobre una superficie plana sin rozamiento, está unido a otro bloque de masa $m_2 = 4$ kg, a través de una cuerda que pasa por una polea, tal como se indica en la fig. 11.23. La ausencia de fricción en el plano y en la polea produce el movimiento inmediato de los dos bloques: el primero desliza a lo largo del plano, mientras que el segundo cae bajo la acción de su peso. Determina: **a)** La aceleración del sistema. **b)** La tensión en la cuerda.

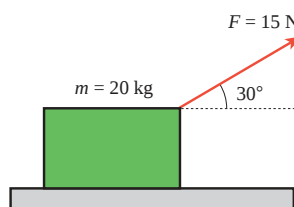


Fig. 11.22 Problema 11.3.

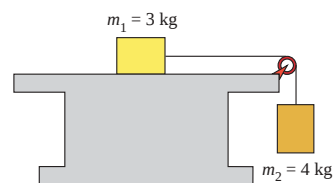


Fig. 11.23 Problema 11.4.

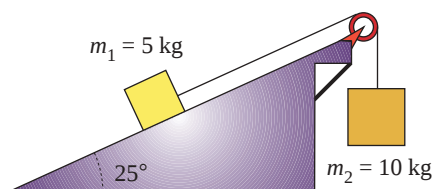


Fig. 11.24 Problema 11.5.

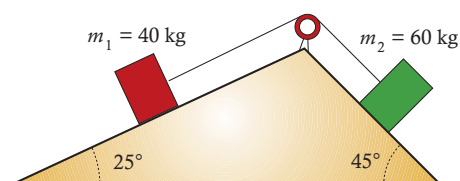


Fig. 11.25 Problema 11.7.

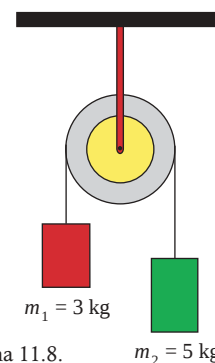


Fig. 11.26 Problema 11.8.

11.5 El conjunto de dos bloques de la fig. 11.24 no tiene roce. Determina: **a)** La aceleración. **b)** La tensión en la cuerda.

11.6 En el problema anterior, el coeficiente de roce entre el bloque de masa m_1 y el plano inclinado es $\mu_d = 0,25$. Determina, en este caso: **a)** La tensión en la cuerda. **b)** La aceleración del sistema.

11.7 **a)** Los bloques mostrados en la fig. 11.25 tienen masas $m_1 = 40$ kg y $m_2 = 60$ kg y el conjunto se desliza hacia la derecha sin rozamiento. **a)** ¿Cuál es la tensión en la cuerda y la aceleración del bloque de masa m_1 ? **b)** Efectúa los cálculos anteriores si el coeficiente de fricción entre los bloques y las superficies de los planos es $\mu = 0,25$.

11.8 El sistema mostrado en la fig. 11.26 se conoce, usualmente, con el nombre de máquina de Atwood. Se trata de dos objetos unidos mediante una cuerda de peso despreciable, que pasa por una polea sin rozamiento, también de masa muy pequeña. Determina la aceleración y la tensión en la cuerda si $m_1 = 3$ kg y $m_2 = 5$ kg.

11.9 El bloque de masa 6 kg de la fig. 11.27 hace ascender al bloque de masa 5 kg a lo largo del plano inclinado, con una velocidad constante. Determina el coeficiente de roce entre el plano y el bloque m_1 .

11.10 El coeficiente de roce entre el bloque de masa igual a 12 kg y el plano inclinado es igual a 0,15. Se aplica una fuerza de magnitud F al bloque, tal como se muestra en la fig. 11.28, y el mismo experimenta una aceleración de módulo $1,8$ m/s². Determina el valor de F .

11.11 En la fig. 11.29, determina el ángulo θ que permite que el bloque de 10 kg ascienda con: **a)** Velocidad constante. **b)** Con aceleración de 2 m/s². $\mu = 0$.

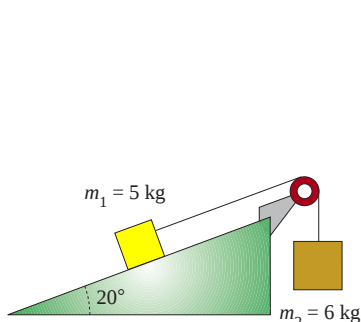


Fig. 11.27 Problema 11.9.

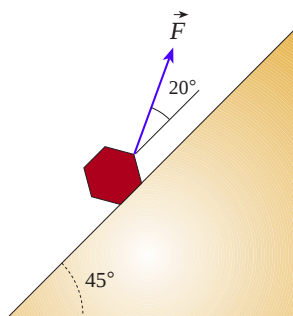


Fig. 11.28 Problema 11.10.

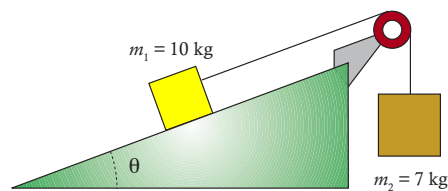


Fig. 11.29 Problema 11.11.

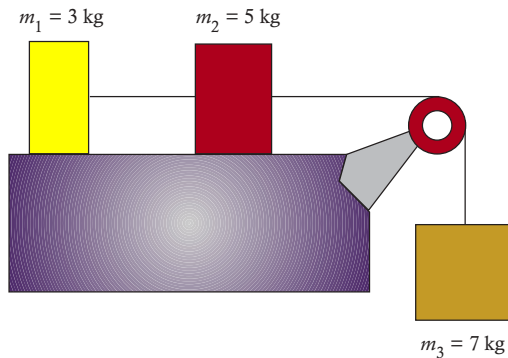


Fig. 11.30 Problema 11.12.

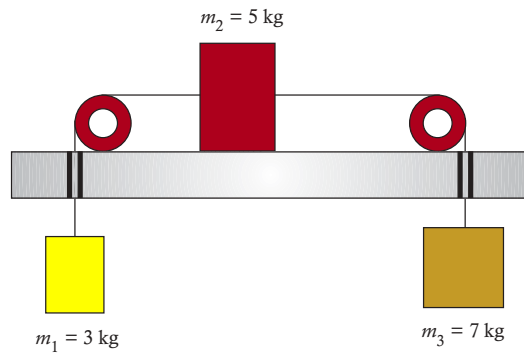


Fig. 11.31 Problema 11.13.

11.12 En ausencia de roce, determina la aceleración del sistema y las tensiones de las cuerdas en la fig. 11.30.

11.13 Determina las tensiones en las cuerdas para la configuración mostrada en la fig. 11.31.

11.14 Determina el valor de la gravedad a distancias de 100 km, 1.000 km y 50.000 km sobre la superficie terrestre. ¿Cuál es la variación porcentual de estos valores, en relación con la gravedad promedio en la superficie de la Tierra?

11.15 Un objeto de masa 100 kg se encuentra dentro de un ascensor que acelera con un valor de 2 m/s^2 . Si el objeto se encuentra encima de una balanza de resorte, determina la lectura de la misma, cuando el ascensor sube o baja con la mencionada aceleración.

11.16 ¿Cuál será el peso de una persona de masa 90 kg en el planeta Júpiter si el radio y la masa del mismo son 11,14 veces y 318,4 veces el radio y la masa de la Tierra, respectivamente?

11.17 La aceleración de gravedad en la superficie solar es, aproximadamente, igual a 270 m/s^2 . Si su diámetro es 110 veces el radio de la Tierra, determina el valor aproximado de su masa.

11.18 La masa de un vehículo en la superficie terrestre es de 1.200 kg. ¿Cuál es su masa y su peso en la Luna y en Júpiter?

CAPÍTULO 12

El equilibrio de los cuerpos

12.1 CONDICIONES DE EQUILIBRIO

La palabra equilibrio de los cuerpos nos sugiere una condición de estabilidad, contrapeso, armonía. En Física se estudian las condiciones de equilibrio de los cuerpos, que se dan en la naturaleza, las cuales se refieren al *equilibrio traslacional* y al *equilibrio rotacional*.

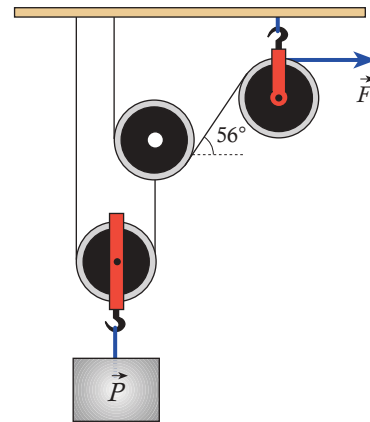
Equilibrio traslacional

De acuerdo con la primera ley del movimiento de Newton, un cuerpo sobre el cual no se ejerce ninguna fuerza o donde la resultante de todas las fuerzas aplicadas es cero, puede estar en *reposo* o en *movimiento rectilíneo y uniforme* (velocidad constante). Un cuerpo que se encuentra en estas condiciones se dice que está en *equilibrio traslacional*. Ahora bien, si un cuerpo se encuentra en estado de reposo, se dice que está en *equilibrio estático* y si se encuentra en movimiento rectilíneo y uniforme está en *equilibrio dinámico*. Esta condición de equilibrio puede expresarse así:

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (12.1)$$

La ecuación (12.1) se conoce en Física como la *primera condición para el equilibrio de los cuerpos*. Normalmente, cuando se resuelven problemas relacionados con el equilibrio de los cuerpos, es más fácil manejarlos utilizando la sumatoria de las componentes rectangulares, expresada mediante la relación (12.1). Dichas componentes son:

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad (12.2)$$



Ejemplo 12.1

La fig. 12.1(a) muestra un bloque con peso de 30 N suspendido de dos cuerdas. Hallar las tensiones en las cuerdas si las mismas forman con la vertical los ángulos $\theta_1 = 60^\circ$ y $\theta_2 = 45^\circ$.

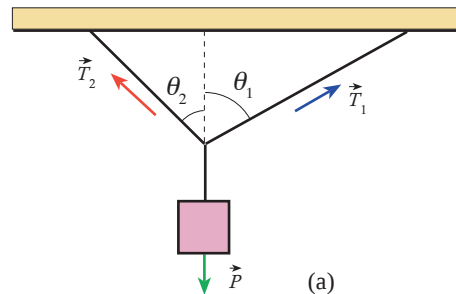


Fig. 12.1 Ejemplo 12.1.

Solución

La fig. 12.1(b) muestra el diagrama de cuerpo libre respectivo. En dicho diagrama se muestran las fuerzas externas que actúan sobre el bloque y la dirección de dichas fuerzas aplicadas en el origen del sistema de coordenadas. Según la relación (12.2), se tiene:

$$\sum \vec{F} = \sum \vec{F}_x + \sum \vec{F}_y$$

En forma de componentes rectangulares, la ecuación anterior se expresa como:

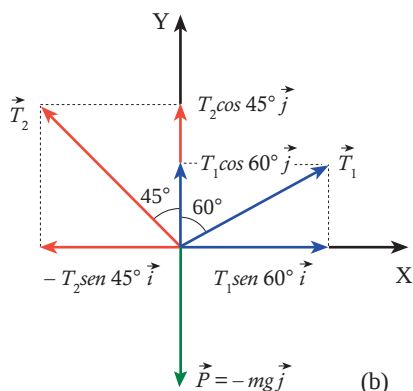


Fig. 12.1 Ejemplo 12.1. Diagrama de cuerpo libre.

$$\sum F_x = T_1 \sen 60^\circ - T_2 \sen 45^\circ = 0$$

$$\sum F_y = T_1 \cos 60^\circ + T_2 \cos 45^\circ - P = 0$$

De la primera de las ecuaciones anteriores, tenemos:

$$T_1 = T_2 \frac{\sen 45^\circ}{\sen 60^\circ} = 0,82 T_2$$

Sustituyendo el resultado anterior en la segunda ecuación y teniendo en cuenta el valor de P , se tiene:

$$0,82 T_2 \cos 60^\circ + T_2 \cos 45^\circ = P$$

$$(0,82 \cdot 0,5 + 0,71) T_2 = 30$$

Efectuando operaciones:

$$1,12 T_2 = 30 \Rightarrow T_2 = \frac{30}{1,12} = 26,79 \text{ N}$$

Sustituyendo este valor en la expresión para T_1 , se obtiene:

$$T_1 = 0,82 T_2 = 0,82 \cdot 26,79 = 21,97 \text{ N}$$

Ejemplo 12.2

La fig. 12.2 muestra un auto atascado en un charco, al cual se intentó mover por tres personas, atándole un mecate suficientemente resistente al parachoques. Las personas aplicando cada una al final del mecate una fuerza de 50 N, no logran mover al carro. Un estudiante que recién había terminado el curso del primer año de Física de Educación Media Diversificada y Profesional y que formaba parte del grupo que estaba tratando de sacar el auto del atolladero, se acordó, de repente, de lo aprendido cuando recibió las clases sobre el estado de equilibrio traslacional de los cuerpos. El miró el área donde estaban y se dio cuenta que al frente del auto, como a 7 metros, estaba un árbol bastante grueso como para resistir una tensión mayor que el peso del vehículo. Propuso, con la seguridad que le daba su conocimiento, amarrar la punta libre del mecate al árbol y luego que aplicaran cada uno su esfuerzo a empujar perpendicularmente y en su punto medio al mecate, aproximadamente a 3,5 m tanto del auto como del árbol. Con este arreglo lograron mover el carro sacándolo del atasco. Determina la tensión aplicada en la cuerda que permitió sacar el automóvil.

Solución

Calculemos la tensión que se aplicó al auto, utilizando el procedimiento descrito en el enunciado. Sabemos que la fuerza aplicada perpendicularmente al mecate por las tres personas, es la misma que aplicaron cuando halaban el mecate en línea recta de frente al carro y ésta fue de 150 N. Supongamos que, al aplicar esta fuerza, logran desviar el mecate un ángulo de 20° con relación a la posición original

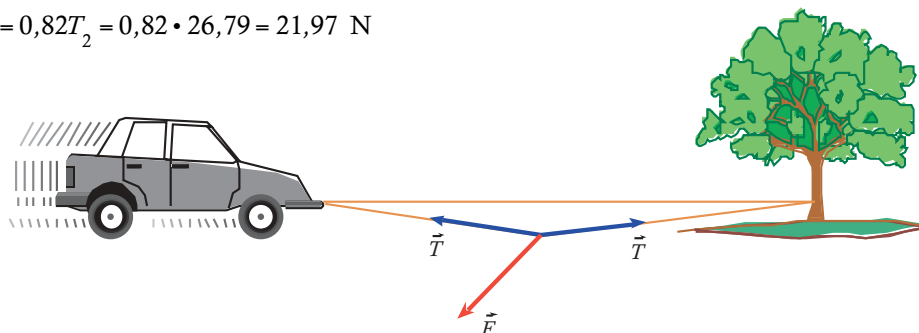


Fig. 12.2 Ejemplo 12.2 $\vec{F}$ representa la fuerza aplicada por tres personas en el centro de la cuerda utilizada para mover el carro atascado. La cuerda se amarró al parachoques del carro y se hizo pasar por el tronco de un árbol. $\vec{T}$ es la tensión en las cuerdas.

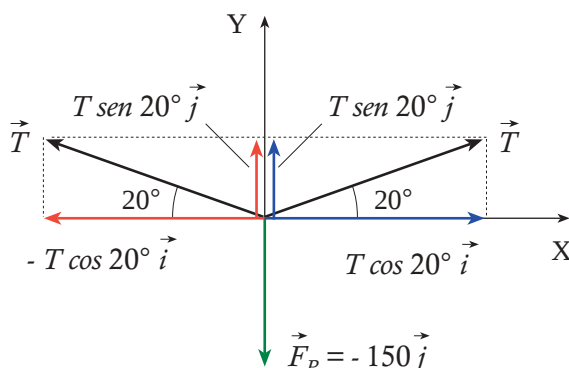


Fig. 12.3 Diagrama de cuerpo libre para el ejemplo 12.2.

del mismo, como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la fig. 12.3. En dicho diagrama se muestran las fuerzas externas que actúan sobre el mecate, en el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas aplicadas por las personas que tratan de sacar el auto. Se muestra, también, la dirección de la fuerza aplicada y de la tensión $\vec{T}$ sobre el mecate, así como las componentes respectivas. La expresión vectorial de las fuerzas aplicadas al mecate es:

$$\sum \vec{F} = 2\vec{T} + \vec{F}_P = 0$$

En forma de componentes rectangulares, la ecuación anterior se expresa así:

$$\sum F_x = T \cos 20^\circ - T \cos 20^\circ = 0$$

$$\sum F_y = T \sen 20^\circ + T \sen 20^\circ - 150 = 0$$

La primera ecuación demuestra que las tensiones son iguales a ambos lados del punto de aplicación de las fuerzas ejercidas por las personas, ya que su diferencia es igual a cero. De la segunda ecuación se obtiene la tensión de la cuerda, la cual es la misma que la aplicada al auto:

$$2T \sen 20^\circ = 150 \Rightarrow T = \frac{150}{2 \cdot \sen 20^\circ} = 219,29 \text{ N}$$

Esta tensión resultó mayor que la tensión aplicada originalmente sobre el mecate (150 N), cuando se trataba de mover al auto aplicando las fuerzas de frente, lo cual permitió sacar el carro del atolladero.

12.2 MOMENTO DE TORSIÓN. EQUILIBRIO ROTACIONAL.

Para entender lo que se entiende por *equilibrio rotacional*, es necesario introducir previamente el concepto de *momento de torsión* o *torca*, como también se le conoce. Cuando se estudió la Cinemática, se dijo que el movimiento de los cuerpos en la naturaleza es, con frecuencia, una combinación de movimientos de traslación y de rotación. Por ejemplo, cuando se lanza una bola de bowling, la misma, a medida que se traslada hacia adelante, va girando sobre sí misma; es decir, desarrolla simultáneamente dos movimientos: uno de traslación y otro de rotación. Por supuesto que existen cuerpos que sólo se trasladan sin rotar y otros que rotan sin trasladarse.

En la vida cotidiana se encuentran, a menudo, objetos que giran o rotan. Cuando vamos a entrar a una habitación, necesitamos abrir la puerta, si la misma está cerrada. Para lograrlo, le aplicamos una fuerza normalmente al pomo de la cerradura para hacerla rotar y así liberar el pestillo. Esta acción permite abrir la puerta. Cuando empujamos la puerta para pasar a la habitación, también le aplicamos una fuerza para hacerla girar.

Una fuerza que se aplica para hacer que los cuerpos giren o, en otras palabras, para hacer que den vueltas, da origen a lo que denominamos *momento de torsión* o *torca*. Es decir, cuando deseamos que algo gire, le aplicamos un momento de torsión. En forma similar, cuando queremos que un cuerpo se traslade, le aplicamos una fuerza.

Por experiencia cotidiana, sabemos que podemos abrir una puerta con mayor facilidad si aplicamos nuestra mano en el pomo de la cerradura o en el punto más alejado, con relación a las bisagras y en forma perpendicular a la misma. La fig. 12.4 muestra una puerta y una fuerza de igual magnitud, usada para abrirla, y aplicada en varios puntos de su superficie.

Si aplicamos la fuerza, como se dijo antes, en forma perpendicular y sobre la manilla de la cerradura ($\vec{F}_1$), podremos hacerla girar(abrirla) con facilidad, pero si aplicamos la fuerza cerca de las bisagras ($\vec{F}_2$), no

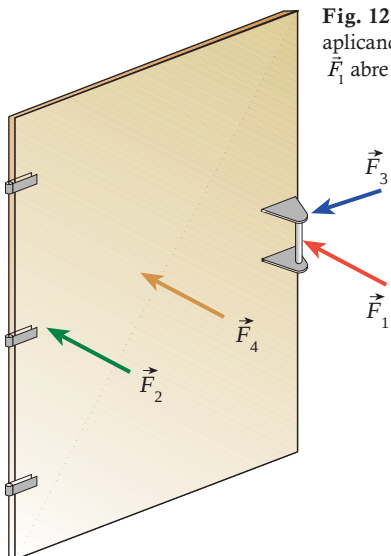


Fig. 12.4 Se sabe, por experiencia, que una puerta puede ser abierta de la manera más fácil aplicando una fuerza perpendicularmente al plano de la misma y lo más alejado de la bisagra. $\vec{F}_1$ abre la puerta con facilidad, $\vec{F}_3$ no la mueve, mientras que $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_4$ la mueven con dificultad.

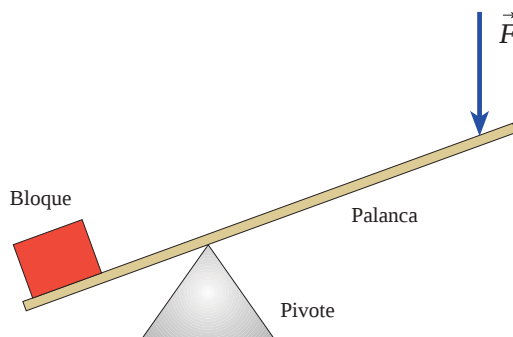


Fig. 12.5 La facilidad para levantar el bloque depende de la dirección de la fuerza y de la distancia del punto de aplicación al pivote.

podremos abrirla y, si se logra, es a costa de un gran esfuerzo. Si aplicamos la fuerza de canto a la puerta ($\vec{F}_3$), no se logra moverla, pues lo que se hace es empujar la puerta contra las bisagras. Si la misma fuerza se aplica perpendicular en el centro de la puerta ($\vec{F}_4$), la podremos abrir, pero advertimos que el giro de la misma es más lento que cuando la aplicamos en el borde más alejado de las bisagras.

De estas experiencias, se puede deducir que al aplicar una fuerza perpendicular a la puerta y lo más alejada posible del centro de rotación de la misma, representado en este caso por las bisagras, se obtiene una rápida rotación con un mediano esfuerzo.

También, casi todo el mundo sabe que si queremos levantar del suelo un bloque de concreto con una palanca, buscamos un punto de apoyo (pivote), como se muestra en la fig.12.5. La facilidad para levantar el bloque se incrementa, si la dirección de la fuerza se acerca lo más posible a la perpendicular a la palanca y entre más alejado del pivote se sitúe el punto de aplicación de la fuerza.

Hemos insistido que el máximo efecto de giro se logra aplicando la fuerza perpendicularmente al cuerpo que se quiere hacer girar, y lo más alejada del eje de rotación. Si la fuerza aplicada no es perpendicular, sólo la componente perpendicular de ésta produce el efecto de rotación o giro, como se

explica más adelante. El efecto de hacer girar un cuerpo se obtiene, entonces, a partir de dos factores: la fuerza y la distancia de su aplicación al eje de rotación. El producto de estos dos factores se denomina en Física *momento de torsión* o *torca* (la palabra torca viene del latín *torquere* que significa girar o retorcer), y usualmente se representa por la letra griega τ (tau). La magnitud del momento de torsión, debido a la acción de una fuerza $\vec{F}$, se expresa como:

$$\tau = Fd_{\perp} \quad (12.3)$$

donde $d_{\perp}$ es el *brazo de palanca* o *brazo de momento* de la fuerza $\vec{F}$.



El brazo de palanca o brazo de momento de una fuerza se define como la distancia perpendicular desde el eje de rotación o pivote a la línea de acción de la fuerza.

Esta definición, que cubre los dos casos de la dirección de una fuerza aplicada para provocar un movimiento de giro: *fuerza perpendicular* y *fuerza no perpendicular*, fue desarrollada por Leonardo da Vinci (Pintor, escultor, ingeniero e inventor italiano, 1452-1519). La fig. 12.6 representa una llave inglesa

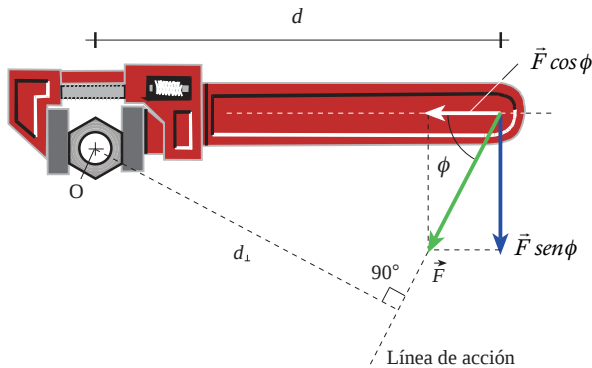


Fig. 12.6 La acción de $\vec{F}$ produce una rotación del conjunto llave-tuerca alrededor de O. Mientras mayores sean esta fuerza y el brazo de palanca $d_{\perp}$, mayor será el momento de torsión. La componente $F \text{ sen } \phi$ es la que hace girar al sistema.

a la cual se le está aplicando una fuerza $\vec{F}$ para apretar una tuerca. La aplicación de dicha fuerza, como se puede ver, no es perpendicular a la horizontal del brazo de la llave sino que forma un ángulo ϕ con la misma. En el triángulo rectángulo que se forma, la distancia $d_{\perp}$, correspondiente al brazo de la palanca y perpendicular a la línea de acción de la fuerza, está dada por:

$$d_{\perp} \text{ (perpendicular a línea de acción de la fuerza)} = d \text{ sen } \phi$$

De acuerdo a la definición de momento:

$$\tau = d F \text{ sen } \phi \quad \Rightarrow \quad \tau = d_{\perp} F \quad (12.4)$$

Por otra parte, si descomponemos la fuerza $\vec{F}$ en sus componentes rectangulares, observamos que la componente $F_x = F \cos \phi$, cuya línea de acción pasa por O, no contribuye en absoluto en el movimiento de rotación; simplemente, comprime la llave contra la tuerca; en cambio, la componente $F_y = F \text{ sen } \phi$, perpendicular al eje de la llave, produce el giro de la llave, originando el momento de torsión. A esta componente podemos expresarla como $F_{\perp} = F \text{ sen } \phi$. El momento de torsión se puede expresar, en función de la distancia al eje de rotación y de la fuerza aplicada, como:

$$\tau = d F_{\perp} \quad (12.5)$$

Se puede ver que las ecuaciones (12.4) y (12.5) son equivalentes y podemos escribir:

$$\tau = d F_{\perp} = d_{\perp} F \quad (12.6)$$

De acuerdo con la relación (12.6), el momento de torsión lo podemos calcular de dos maneras: multiplicando el brazo de torsión perpendicular a la línea de acción de $\vec{F}$ o multiplicando la componente perpendicular de la fuerza $\vec{F}$ por su distancia al eje de rotación. La unidad SI del momento de torsión es el Nm (newton por metro).



Debido a que un cuerpo puede girar en sentido horario o antihorario, se ha adoptado la convención de que un momento de torsión que tiende a producir un giro en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj, es positivo. La rotación en sentido contrario produce un momento de torsión de signo negativo.

Si dos o más fuerzas actúan sobre un cuerpo rígido, cada una de las mismas producirá un momento de torsión alrededor del eje de rotación, O. La fig. 12.7 presenta dos fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$, aplicadas en los puntos que se muestran. La fuerza $\vec{F}_1$ tiende a rotar el cuerpo alrededor de O en el sentido de las agujas del reloj y la fuerza $\vec{F}_2$ tiende a rotarlo en sentido contrario. Por la convención establecida, el momento

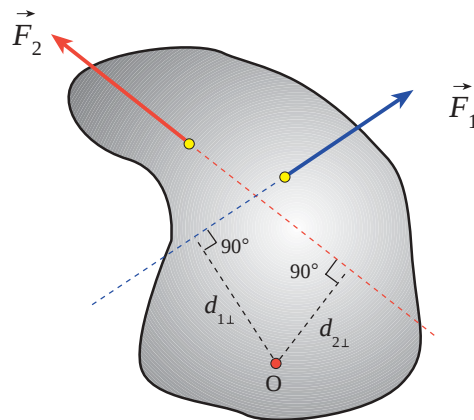


Fig. 12.7 $\vec{F}_1$ tiende a hacer girar al cuerpo alrededor del eje O en el sentido de las agujas del reloj, por lo que el momento de torsión será negativo. $\vec{F}_2$ tiende a hacer girar el cuerpo en sentido contrario y, por tanto, el momento de torsión será positivo.

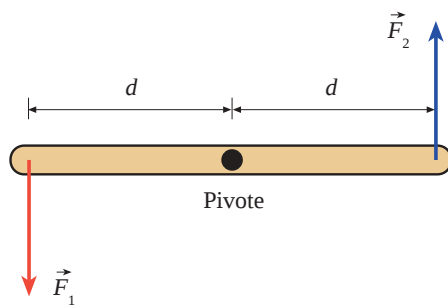


Fig. 12.8 Dos fuerzas de igual magnitud, pero de sentido contrario forman un par. La resultante de las dos fuerzas es cero, por lo que las mismas no pueden reemplazarse por una sola fuerza.

de torsión producido por la fuerza $\vec{F}_1$ será: $\tau_1 = -d_{\perp 1} F_1$ y el momento de torsión producido por la fuerza $\vec{F}_2$ será $\tau_2 = d_{\perp 2} F_2$. El momento de torsión resultante alrededor del eje O será, entonces:

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = d_{\perp 2} F_2 - d_{\perp 1} F_1 \quad (12.7)$$

Es importante señalar que el momento de torsión o torca no es lo mismo que una fuerza, pues éste es el producto de una fuerza por una longitud, expresado en unidades del SI en newtons-metros, como fue explicado antes.

Para que un cuerpo se mantenga en equilibrio, es necesario que la sumatoria de todas las fuerzas aplicadas sea igual a cero ($\sum \vec{F} = 0$). Esta primera condición de equilibrio no es suficiente para el equilibrio de los cuerpos. Como se muestra en la fig. 12.8, la suma vectorial de dos fuerzas iguales y opuestas es cero y, sin embargo, la acción de las mismas hace girar el cuerpo. Este caso de las fuerzas representadas en la fig. 12.8 se conoce como *par de fuerzas*. Cada fuerza producirá un momento de torsión igual a Fd y el momento resultante será $2Fd$. Este valor del momento de torsión total provocará un giro del cuerpo y, por lo tanto, es una situación de no equilibrio en el movimiento rotatorio. El cuerpo dejará de rotar hasta que las fuerzas actúen en la misma línea de acción. En el caso de un par de fuerzas, donde la resultante es cero, éstas no pueden ser sustituidas por una sola fuerza equivalente.

Para que haya equilibrio rotacional la sumatoria de todos los momentos de torsión alrededor de cualquier eje, debe ser igual a cero. Esta situación se conoce como la *segunda condición de equilibrio* de los cuerpos. Matemáticamente, se expresa como:

$$\sum \tau = 0 \quad (12.8)$$

En forma similar a la primera condición de equilibrio, la cual se da cuando $\sum \vec{F} = 0$, donde el cuerpo puede estar en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme, un cuerpo en el cual se cumple que $\sum \tau = 0$, estará en reposo rotacional o bien gira con velocidad angular constante.

Como un resumen de lo descrito sobre las condiciones de equilibrio de los cuerpos, podemos escribir que un cuerpo está en equilibrio cuando se cumplen las dos condiciones de equilibrio dadas por:

1. La 1ra. condición para el equilibrio traslacional:

$$\sum \vec{F} = 0$$

2. La 2da. condición para el equilibrio rotacional:

$$\sum \tau = 0$$

Ejemplo 12.3

Determina el momento de torsión sobre la barra de la fig. 12.9, si la magnitud de la fuerza $\vec{F}$ aplicada a un extremo de la misma es de 10 N y forma un ángulo de 60° con la línea que pasa a su largo. La longitud de la barra es de 2 m.

Solución

Como se puede observar en la fig. 12.9, la fuerza $\vec{F}$ no es perpendicular al eje de la barra. Dicha fuerza puede descomponerse en dos fuerzas de magnitudes $F \sin 60^\circ$ y $F \cos 60^\circ$. La primera de ellas es perpendicular al eje de la barra y es capaz de producir rotación alrededor del pivote. La segunda fuerza, $F \cos 60^\circ$, comprime a la barra contra el pivote

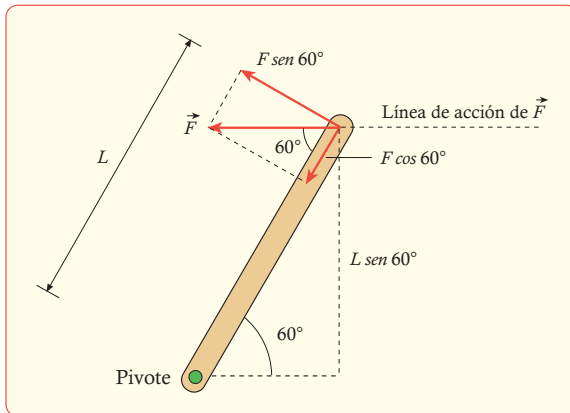


Fig. 12.9 Ejemplo 12.3.

y no produce momento de rotación. El momento debido a la fuerza $F \text{ sen } 60^\circ$ está dado por la relación (12.6):

$$\tau = F_{\perp} d = F \text{ sen } 60^\circ d = (10 \text{ N}) \cdot 0,87 \cdot (2 \text{ m}) = 17,4 \text{ Nm}$$

Ejemplo 12.4

Los personajes de la fig. 12.10 pesan 500 N y están colocados a 2 m de uno de los extremos de una barra de longitud 6 m, cuyo peso es despreciable. Determina las tensiones T_1 y T_2 en las cuerdas que soportan la barra.

Solución

La fig. 12.10 muestra las fuerzas aplicadas a la barra: las tensiones $\vec{T}_1$ y $\vec{T}_2$ sobre las cuerdas que sostienen la barra y el peso $\vec{P}$ de nuestros amigos. La

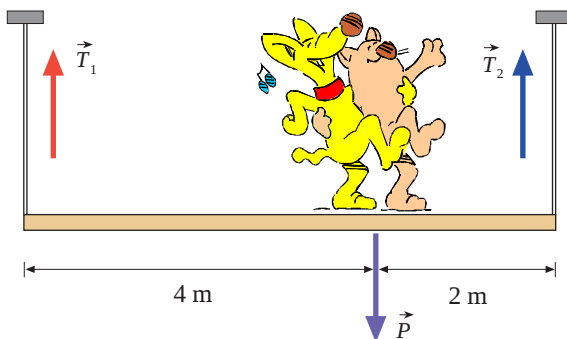


Fig. 12.10 Ejemplo 12.4.

expresión vectorial para la resultante de las fuerzas es:

$$\sum \vec{F} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + \vec{P} = 0$$

Para pasar a una relación escalar, escribimos:

$$T_1 \vec{j} + T_2 \vec{j} - P \vec{j} = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 + T_2 = 500$$

Para poder determinar los valores de T_1 y T_2 , necesitamos otra relación. Esta corresponde a la condición de equilibrio rotacional dado por $\sum \tau = 0$. El eje de rotación puede ser tomado en cualquier punto a lo largo de la tabla. Por conveniencia, tomemos como eje de rotación el punto donde están colocados nuestros personajes y determinemos momentos con respecto al mismo:

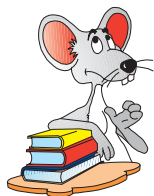
$$\sum \tau = 2T_1 - 4T_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad T_1 = 2T_2$$

Combinando las dos ecuaciones obtenidas, tenemos:

$$2T_2 + T_2 = 500 \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{500}{3} = 166,67 \text{ N}$$

Finalmente, el valor de T_1 está dado por:

$$T_1 = 2T_2 = 333,33 \text{ N}$$



PIENSA Y EXPLICA



12.1 Define equilibrio traslacional y equilibrio rotacional.

12.2 Define equilibrio estático y equilibrio dinámico.

12.3 ¿A qué se denomina momento de torsión?

12.4 Mediante la fig. 12.4 explica el efecto de las fuerzas aplicadas a distintos puntos de la puerta, resaltando los casos donde se produce momento de torsión.

12.5 Explica los términos involucrados en la relación matemática (12.3), que define el momento de torsión.

12.6 ¿Cuándo se dice que un momento de torsión es positivo o negativo?

12.7 ¿Qué es un par de fuerzas? Explica cómo es posible que la suma vectorial de dos fuerzas sea nula y que, sin embargo, el objeto al que se aplican pueda moverse.



PROBLEMAS



12.1 La piñata de la fig. 12.11 cuelga de una cuerda de 4 m de longitud y se desvía 40 cm bajo la acción de su peso. Si la masa de la piñata es de 5 kg, determina las tensiones en las cuerdas.

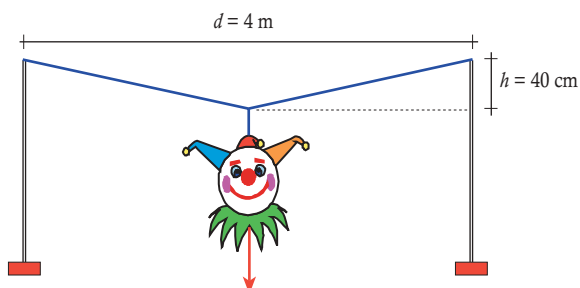


Fig. 12.11 Problema 12.1.

12.2 Un pizarrón de 10 kg de masa se cuelga de tres maneras diferentes (fig. 12.12). Determina en cuál de los casos es mayor la tensión en las cuerdas.

12.3 Si la masa del bloque colgante de la fig. 12.13 es de 20 kg, determina, en cada caso, el valor de la fuerza F que debe aplicarse para equilibrar su peso.

12.4 Cada una de las mariposas de la fig. 12.14 tiene una masa 200 g. Los pesos de las cuerdas y de los soportes transversales son insignificantes. **a)** ¿Qué peso soportan las cuerdas y el techo? **b)** ¿Cuáles son los valores de x , y , y z para que se mantenga el equilibrio?

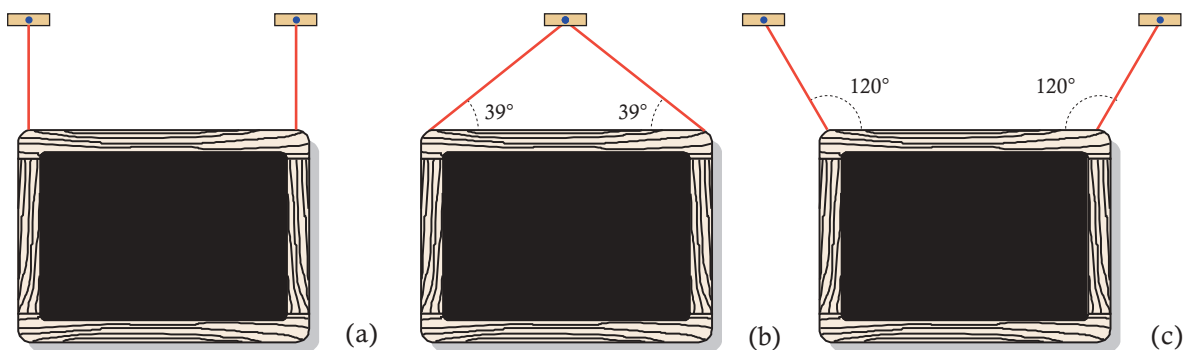


Fig. 12.12 Problema 12.2.

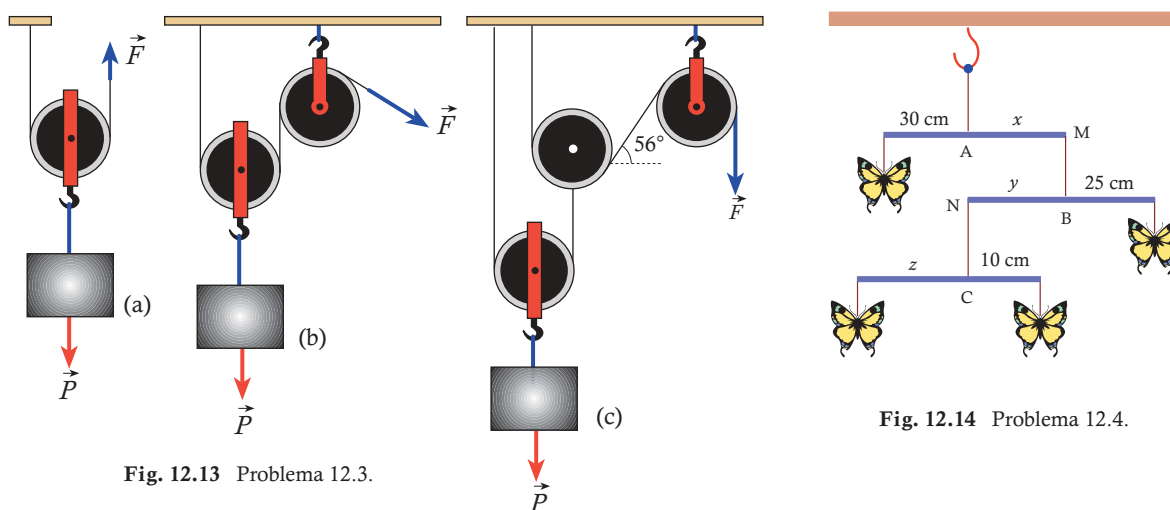


Fig. 12.13 Problema 12.3.

Fig. 12.14 Problema 12.4.

12.5 La regla de la fig. 12.15 tiene una masa de 120 g. Al lado derecho del pivote se cuelgan pesos de 80 y 50 g. **a)** ¿A qué distancia debe colocarse una masa de 100 g para balancear el sistema? **b)** ¿Qué fuerza ejerce el pivote sobre la regla?

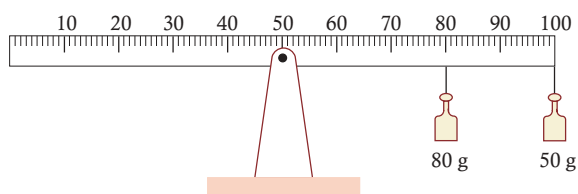


Fig. 12.15 Problema 12.5.

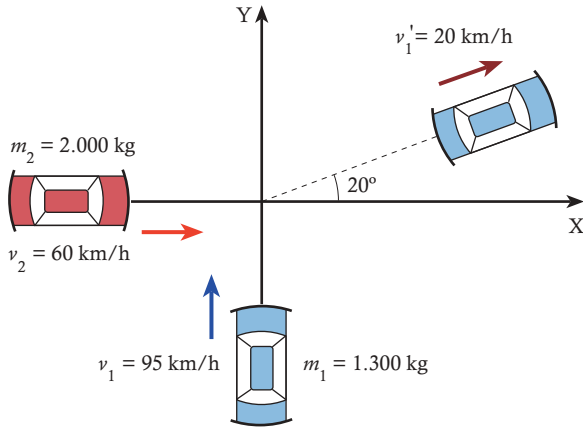


Fig. 13.3 Ejemplo 13.5. Como resultado de la colisión entre los dos vehículos, uno de ellos disminuye la magnitud de su velocidad y cambia su dirección de movimiento. Se desea determinar la velocidad del otro vehículo después del choque.

Ejemplo 13.5

Un vehículo de masa $m_1 = 1.300 \text{ kg}$ que viaja hacia el norte con velocidad de 95 km/h , choca con otro vehículo de masa $m_2 = 2.000 \text{ kg}$ que viaja hacia el este a 60 km/h , tal como se esquematiza en la fig. 13.3. Como resultado de la colisión, el vehículo de masa m_1 continúa moviéndose a una velocidad de 20 km/h con un ángulo de 20° , respecto de la horizontal. Determina la velocidad del vehículo de masa m_2 después de la colisión.

Solución

Reduzcamos los módulos de las velocidades a m/s . v_1 y v_2 son las velocidades de los vehículos de masas m_1 y m_2 , antes de producirse la colisión y v'_i es la velocidad del vehículo de masa m_i , después de la colisión. Se tiene:

$$v_1 = 95 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{95.000}{3.600} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 26,39 \text{ m/s}$$

$$v_2 = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{60.000}{3.600} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 16,67 \text{ m/s}$$

Hagamos las siguiente denotaciones:

$\vec{p}_1$ = momento del vehículo de masa m_1
antes de la colisión

$\vec{p}_2$ = momento del vehículo de masa m_2
antes de la colisión

$\vec{p}'_1$ = momento del vehículo de masa m_1
después de la colisión

$\vec{p}'_2$ = momento del vehículo de masa m_2
después de la colisión

Expresemos vectorialmente los momentos antes y después del choque:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad (13.6)$$

Como la componente según el eje X de la velocidad del automóvil de masa m_1 y la componente según el eje Y de la velocidad del automóvil de masa m_2 son iguales a cero, podemos escribir:

$$\vec{p}_1 = p_{1y} \vec{j} = m_1 v_{1y} \vec{j} \quad \vec{p}_2 = p_{2x} \vec{i} = m_2 v_{2x} \vec{i} \quad (13.7)$$

Después del choque, los vehículos continúan a velocidades diferentes. El de masa m_1 sigue con una velocidad de magnitud 20 km/h y forma un ángulo de 20° con la horizontal. Desconocemos la magnitud y ángulo de la velocidad del vehículo de masa m_2 . Para los dos vehículos se tiene:

$$\begin{aligned} \vec{p}'_1 &= p'_{1x} \vec{i} + p'_{1y} \vec{j} = p'_1 \cos \alpha \vec{i} + p'_1 \sin \alpha \vec{j} = \\ &= m_1 v'_1 \cos \alpha \vec{i} + m_1 v'_1 \sin \alpha \vec{j} \end{aligned} \quad (13.8)$$

$$\begin{aligned} \vec{p}'_2 &= p'_{2x} \vec{i} + p'_{2y} \vec{j} = p'_2 \cos \phi \vec{i} + p'_2 \sin \phi \vec{j} = \\ &= m_2 v'_2 \cos \phi \vec{i} + m_2 v'_2 \sin \phi \vec{j} \end{aligned} \quad (13.9)$$

Combinando las relaciones (13.6), (13.7), (13.8) y (13.9):

$$\begin{aligned} m_1 v_{1y} \vec{j} + m_2 v_{2x} \vec{i} &= \\ &= m_1 v'_1 \cos \alpha \vec{i} + m_1 v'_1 \sin \alpha \vec{j} + m_2 v'_2 \cos \phi \vec{i} + m_2 v'_2 \sin \phi \vec{j} \end{aligned} \quad (13.10)$$

Agrupando términos en $\vec{i}$ y en $\vec{j}$:

$$\begin{aligned} m_1 v_{1y} \vec{j} + m_2 v_{2x} \vec{i} &= \\ &= (m_1 v'_1 \cos \alpha + m_2 v'_2 \cos \phi) \vec{i} + (m_1 v'_1 \sin \alpha + m_2 v'_2 \sin \phi) \vec{j} \end{aligned} \quad (13.11)$$

Igualando términos en $\vec{i}$ y en $\vec{j}$:

$$m_2 v_{2x} = m_1 v_1' \cos \alpha + m_2 v_2' \cos \phi \quad (13.12)$$

$$m_1 v_{1y} = m_1 v_1' \sin \alpha + m_2 v_2' \sin \phi$$

De las dos relaciones anteriores, se obtiene:

$$\begin{aligned} v_2' \sin \phi &= \frac{m_1 v_{1y} - m_1 v_1' \sin \alpha}{m_2} \\ v_2' \cos \phi &= \frac{m_2 v_{2x} - m_1 v_1' \cos \alpha}{m_2} \end{aligned} \quad (13.13)$$

Dividiendo las relaciones obtenidas y sustituyendo valores ($\sin 20^\circ = 0,34$; $\cos 20^\circ = 0,94$):

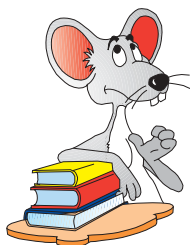
$$\begin{aligned} \tan \phi &= \frac{m_1 v_{1y} - m_1 v_1' \sin \alpha}{m_2 v_{2x} - m_1 v_1' \cos \alpha} = \\ &= \frac{1.300 \cdot 26,39 - 1.300 \cdot 5,56 \cdot 0,34}{2.000 \cdot 16,67 - 1.300 \cdot 5,56 \cdot 0,94} = 1,20 \end{aligned}$$

El ángulo correspondiente al valor anterior es:

$$\phi = \tan^{-1}(1,20) = 50,19^\circ$$

A partir de (13.13) obtenemos la magnitud de la velocidad del vehículo de masa m_2 :

$$\begin{aligned} v_2' &= \frac{m_1 v_{1y} - m_1 v_1' \sin \alpha}{m_2 \sin(50,19^\circ)} = \\ &= \frac{1.300 \cdot 26,39 - 1.300 \cdot 5,56 \cdot 0,34}{2.000 \cdot 0,77} = 20,68 \text{ m/s} \end{aligned}$$



PIENSA Y EXPLICA



13.1 Define el concepto de cantidad de movimiento o momento lineal y escribe la relación matemática que representa este concepto. ¿En qué unidades se expresa la cantidad de movimiento de un objeto?

13.2 ¿Es la cantidad de movimiento una cantidad escalar o vectorial? Explica.

13.3 ¿A qué se denomina impulso de una fuerza? Explica por qué el impulso es una cantidad vectorial. ¿En qué unidades se expresa el impulso?

13.4 Expresa verbalmente la relación entre la cantidad de movimiento y el impulso de un cuerpo. ¿Cuál es la expresión matemática de esta relación?

13.5 Expresa el principio de conservación de la cantidad de movimiento y bajo qué condiciones éste es válido.

13.6 ¿Puede un impulso ser negativo? Explica.

13.7 ¿Qué son fuerzas internas y externas en un sistema de partículas?

13.8 ¿Qué es una colisión entre partículas? ¿Qué son colisiones elásticas y colisiones inelásticas? Explica su significado en ambos casos

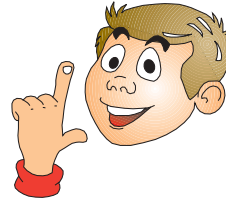
13.9 Si se deja caer un objeto de masa m desde una altura h , ¿cuál es el valor del impulso cuando el objeto choca contra el suelo?

13.10 ¿Cuál es la cantidad de movimiento de un cuerpo de masa m , luego de t segundos de un objeto que se deja caer desde una altura h ?

13.11 Aun cuando el momento se conserva, usualmente los objetos en movimiento bajan su velocidad y, luego, se detienen. Explica.



PROBLEMAS



13.1 Una fuerza de 5 N actúa durante 12 s sobre un objeto de masa 4 kg el cual se encontraba moviéndose a 10 m/s. a) ¿Cuál es el cambio de la cantidad de movimiento del objeto? b) ¿Cuál es la velocidad final del objeto?

13.2 Un carro de masa 1.000 kg que se mueve hacia el este con una velocidad de magnitud 10 m/s, choca contra un camión estacionado de 2.000 kg de masa. Como resultado de la colisión ambos vehículos continúan moviéndose hacia el este. ¿Cuál es su velocidad?

13.3 Una pelota de 120 g es lanzada hacia la derecha a 2 m/s. En su trayectoria, choca con otra pelota de 180 g que se dirige hacia la izquierda a 5 m/s. Después de la colisión, la pelota de 120 g se dirige hacia la izquierda a una velocidad de 5 m/s. ¿Cuál es la velocidad de la pelota de 180 g?

13.4 Un carro de 1.250 kg que viaja hacia el norte a 110 km/h choca con un camión de 2.200 kg que va hacia el sur a 40 km/h. Luego del choque, la velocidad del vehículo es de 60 km/h hacia el sur. ¿Cuál es la velocidad del camión, después del choque?

13.5 Una bola de masa 0,45 kg se mueve a una velocidad de 5 m/s a un ángulo de 25° por encima de la horizontal. ¿Cuáles son los componentes de su cantidad de movimiento? Expresa la cantidad de movimiento como un vector.

13.6 Un navío espacial tiene 2 cohetes de propulsión. Uno de los cohetes produce una fuerza de empuje de 400 N y el segundo cohete de 800 N. Al dispararse el cohete más pequeño por 10 s, la velocidad de la nave aumenta de 80 m/s a 100 m/s. Se enciende luego el cohete más grande por un lapso de 15 s. ¿Qué velocidad alcanza la nave espacial?

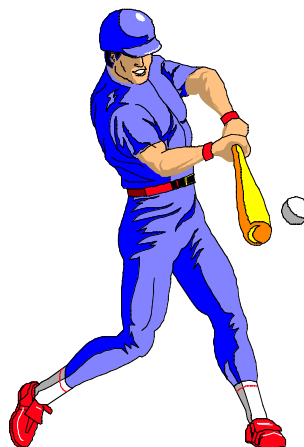
- 13.7** Una nave espacial está viajando a una velocidad de 300 m/s. Se enciende un cohete retropropulsor que proporciona una fuerza de 500 N por 8 s y, como consecuencia, la nave baja su velocidad a 250 m/s. Luego, se enciende un segundo cohete que empuja al navío espacial con una fuerza de 120 N durante 5 s. ¿Cuál es la velocidad de la nave?
- 13.8** Un hombre de 80 kg de masa corre 5 km en 30 minutos, a una velocidad constante. ¿Cuál es su cantidad de movimiento?
- 13.9** Un rifle de masa 4 kg dispara una bala de 18 g a una velocidad de 500 m/s. ¿Cuál es la velocidad de retroceso del rifle?
- 13.10** Un patinador de 60 kg, que se desliza a 15 km/h, choca con otro patinador de 70 kg, que se mueve a una velocidad de 10 km/h en la misma dirección. Si ambos continúan juntos, a) ¿Cuál es la velocidad de ambos, luego del contacto? b) ¿Se perdió energía cinética del sistema formado por los dos patinadores?
- 13.11** Repite el problema anterior si el choque se produce cuando los patinadores se mueven en direcciones contrarias.
- 13.12** Un objeto A de 5 kg, que se mueve a una velocidad de 4 m/s choca con otro objeto B de 5 kg que se encuentra en reposo. Después de la colisión, el objeto A se mueve a una velocidad de 3 m/s con un ángulo de 30° por encima de la horizontal. ¿Cuál es la velocidad del objeto B, después de la colisión?
- 13.13** Una bola de 15 g, que se encontraba en reposo, es golpeada por otra de 25 g, que se movía hacia el este a 4 m/s. Después del choque, la bola de 15 g tiene una velocidad de 1,5 m/s, con una inclinación de 40° sobre la horizontal. ¿Cuál es la velocidad de la otra bola y su ángulo de desviación?
- 13.14** Una bola de 50 g, que se encontraba en reposo, es golpeada por otra de 35 g que se mueve hacia el oeste a 6 m/s. Luego del choque, la primera tiene una velocidad de 3 m/s a 240° con la horizontal. Expresa el valor vectorial de la velocidad de la segunda bola.
- 13.15** Un astronauta de masa 140 kg, en caminata espacial, se empuja desde una nave de 3.000 kg, adquiriendo una velocidad de 2,8 m/s. a) ¿Cuál es el cambio en la velocidad de la nave espacial? b) Si el empujón del astronauta contra la nave dura 0,50 s, ¿cuál es la fuerza media ejercida por él sobre la nave? ¿Cuál es la fuerza media ejercida por la nave sobre el astronauta? c) Determina la energía cinética del astronauta y la nave después del empujón.
- 13.16** Demuestra que para cualquier colisión elástica frontal en una dimensión, las velocidades después de la colisión pueden calcularse mediante las fórmulas:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2$$

CAPÍTULO 13

Cantidad de Movimiento



13.1 CANTIDAD DE MOVIMIENTO

El concepto de *cantidad de movimiento* o *momento lineal*, como también se le conoce, fue introducido por Newton (en base a estudios adelantados por otros físicos anteriores a él, como el holandés Christian Huygens), para describir los movimientos resultantes de dos objetos cuando chocan entre sí. Consideremos el caso del jugador de béisbol cuando golpea la pelota con el bate. El bate, como sabemos, tiene una masa varias veces mayor que la de la pelota, la cual, al ser golpeada, sale disparada con una velocidad inicial muy alta. Esto implica una sucesión continua de cambios en la velocidad y, como consecuencia, un movimiento acelerado. Por la ley de acción y reacción o tercera ley de Newton, el bate también sufre un cambio en su velocidad al golpear la pelota, pues el mismo soporta una fuerza de reacción igual y opuesta a la fuerza ejercida sobre la misma. Esta fuerza de reacción producirá un cambio en su velocidad, el cual será menor que el de la pelota, debido a que tiene una masa mayor, como se dijo antes. El hecho de que la velocidad de los objetos después del choque depende de la masa respectiva, nos lleva a recordar la primera ley de Newton o ley de la inercia, aplicada, en este caso, a objetos en movimiento.



Se define la cantidad de movimiento o momento lineal de una partícula de masa m , que se desplaza con la velocidad $\vec{v}$, al producto de la masa de la partícula por su velocidad.

En símbolos:

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad (13.1)$$

La expresión *momento lineal* fue la utilizada originalmente por varios físicos antes de Newton. El significado etimológico de la palabra momento proviene del Latín *momentum* y significa movimiento. Como se dijo antes, Newton introdujo la expresión *cantidad de movimiento* y en la actualidad las dos expresiones son utilizadas indistintamente.

Como se puede ver en la relación (13.1), la cantidad de movimiento es un vector, ya que es el producto del escalar m por el vector $\vec{v}$ y su dirección sigue a la dirección de $\vec{v}$. La unidad de la cantidad de movimiento en el SI es kg m/s.

De acuerdo con la definición de cantidad de movimiento, y debido al hecho de que la velocidad de los objetos después de un choque depende de la masa respectiva, existe una relación directa con la primera ley de Newton o ley de la inercia, aplicada, en este caso, a objetos en movimiento. Esto nos permite establecer cuándo un objeto tiene mayor o menor momento en relación a otro que se mueve a la misma velocidad. Por ejemplo, un automóvil que se mueve a la velocidad de 60 km/h tiene menor momento (menor inercia) que una gandola que se mueve a la misma velocidad. Igualmente una bola de tenis que se mueve a la velocidad de 8 km/h, tiene un momento menor que una pelota de billar que se mueve a esta velocidad. Si la pelota de billar está parada, es decir, si su velocidad es cero, su momento será cero.

13.2 IMPULSO

Como vimos en la sección anterior, la cantidad de movimiento de una partícula en movimiento es igual a la masa de la partícula por la velocidad. Si el movimiento de una partícula es rectilíneo y uniforme, $\vec{p}$ es una constante. Esto significa que sobre la partícula no está actuando ninguna fuerza externa. Cuando una fuerza externa actúa sobre la partícula, según la segunda ley del movimiento de Newton, le imprime a dicha partícula una aceleración o, lo que es lo mismo, produce un cambio en la velocidad. Cuando esto ocurre, la cantidad de movimiento de la partícula varía proporcionalmente, según la fórmula $\vec{p} = m\vec{v}$. Ahora bien, la magnitud de la fuerza aplicada sobre la partícula puede ser grande o pequeña y su aplicación puede durar mucho tiempo o muy poco tiempo. De tal manera que, tanto la magnitud de la fuerza aplicada como el tiempo que dura su aplicación, son dos factores importantes para producir un cambio en la cantidad de movimiento de una partícula.



Al producto de la fuerza que actúa sobre un objeto multiplicado por el intervalo de tiempo en el cual se aplica dicha fuerza, se denomina impulso.

El impulso puede ser expresado mediante la fórmula:

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t \quad (13.2)$$

donde $\vec{I}$ es el impulso, $\vec{F}$ es la fuerza aplicada a la partícula y Δt es el intervalo de tiempo durante el cual se aplica la fuerza. Como $\vec{F} = m\vec{a} = m\Delta\vec{v}/\Delta t$, la relación (13.2) se puede escribir como:

$$\vec{I} = \vec{F}\Delta t = m\vec{a}\Delta t = m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}\Delta t = m\Delta\vec{v} \quad (13.3)$$

Pero $m\Delta\vec{v} = \Delta\vec{p}$, por lo que la relación anterior se transforma en:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} \quad (13.4)$$

Fórmula que nos indica que *el impulso que se le suministra a un objeto es igual a la variación de la cantidad de movimiento*. Observa que el impulso puede expresarse en función de la velocidad como:

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\vec{v}_f - m\vec{v}_i \quad (13.5)$$

El impulso es un vector y su dirección, como se puede ver, es la misma que la de la fuerza aplicada. Cuando se dice que a una partícula se le da un impulso, se quiere expresar que una fuerza externa produce una variación de la cantidad de movimiento de la misma.

Ejemplo 13.1

Una bola de golf es golpeada por un jugador, de forma tal que el palo de golf ejerce sobre la misma una fuerza de 580 N. Si el tiempo de contacto entre la bola y el palo de golf es de 0,0050 s, **a)** ¿cuál es el impulso? **b)** ¿Cuál es la velocidad de la pelota de golf al final de ese período de tiempo, si su masa es de 42 g?

Solución

a) De acuerdo con la relación (13.2), el impulso está dado por:

$$I = F\Delta t = 580 \cdot 0,005 = 2,9 \text{ Ns}$$



b) Si inicialmente la bola de golf estaba inmóvil su velocidad inicial era igual a cero. Al ser golpeada, adquiere una velocidad, cuyo módulo podemos calcular usando la relación (13.5) con $v_i = 0$:

$$I = mv_f - mv_i = mv_f \Rightarrow$$

$$v_f = \frac{I}{m} = \frac{2,9 \text{ Ns}}{42 \text{ g}} = \frac{2,9 \frac{\text{kgm}}{\text{s}^2} \text{s}}{42 \cdot 10^{-3} \text{ kg}} = 69,05 \text{ m/s}$$

Esta velocidad es igual a 248,58 km/s, lo cual nos indica que la bola de golf alcanza una velocidad considerable al ser golpeada.

Ejemplo 13.2

Una pelota de beisbol tiene una masa de 145 g. **a)** Si la magnitud de la velocidad de la pelota lanzada por el pitcher es de 45 m/s y el bateador la golpea con una velocidad de 55 m/s, determina el cambio en la cantidad de movimiento y el impulso aplicado a la misma por el bate. **b)** Si la bola permanece en contacto con el bate por 2 milisegundos (ms), ¿cuál es la fuerza promedio aplicada por el bate?

Solución

a) La relación (13.5) nos da el cambio en la cantidad de movimiento:

$$\Delta p = mv_f - mv_i = m(v_f - v_i)$$

Como $v_f = 55$ m/s y $v_i = -45$ m/s, el valor de Δp con $m = 0,145$ kg es:

$$\begin{aligned}\Delta p &= 0,145 \text{ kg} \cdot [55 \text{ m/s} - (-45 \text{ m/s})] = \\ &= 0,145 \cdot 100 \text{ kgm/s} = 14,5 \text{ kgm/s}\end{aligned}$$

Como Δp es igual al impulso, entonces $I = 14,5$ kgm/s

b) Según la relación (13.2):

$$I = F\Delta t \quad \Rightarrow \quad F = \frac{I}{\Delta t} = \frac{14,5 \text{ kgm/s}}{2 \cdot 10^{-3} \text{ s}} = 7.250 \text{ N}$$

13.3 CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Si la fuerza resultante externa neta aplicada a una partícula es cero, ésta se desplaza con movimiento rectilíneo y uniforme y la cantidad de movimiento es constante; es decir, $\vec{p} = m\vec{v} = \text{constante}$.

Para un sistema de partículas aislado, es decir un sistema sobre el cual la resultante de todas las fuerzas externas aplicadas es cero, el centro de masa se desplaza con velocidad constante y la cantidad de movimiento es, también, constante. Este hecho se expresa diciendo que la cantidad de movimiento de un sistema, en ausencia de la aplicación de una

fuerza externa, se conserva. De aquí se desprende una de las leyes fundamentales de la Física, conocida como la *Ley de la Conservación de la Cantidad de Movimiento*, la cual puede enunciarse así:

Si un sistema de partículas está aislado de su entorno, de tal manera que sobre el mismo no se ejercen fuerzas externas, la cantidad de movimiento total del sistema permanece constante a lo largo del tiempo.

Ejemplo 13.3

Un proyectil es disparado horizontalmente sobre un bloque de madera de 550 g de masa que está en reposo sobre una superficie lisa, la cual descansa sobre un pedestal de hierro como se muestra en la fig. 13.1. El proyectil tiene una masa de 15 g y se desplaza con una velocidad de 450 m/s. Determina: **a)** La velocidad final, tanto del proyectil como del bloque, después que se produce el impacto. **b)** El impulso del proyectil sobre el bloque.

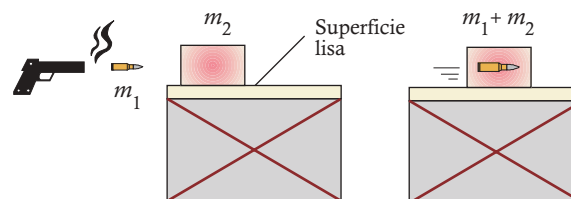


Fig. 13.1 Ejemplo 13.3. Como no existen fuerzas externas al sistema proyectil - bloque, la cantidad de movimiento lineal permanece constante.

Solución

a) Cuando el proyectil impacta al bloque, ambos cuerpos se mueven a la misma velocidad. Por lo tanto, el centro de masa del sistema se moverá, también, con la misma velocidad. Esta velocidad del centro de masa es igual a la velocidad final del proyectil. Con esta velocidad, calculamos el impulso ejercido por el bloque sobre el proyectil. La velocidad final del proyectil se calcula aplicando la ecuación $p = mv$. Como el proyectil se desplaza horizontalmente, esta ecuación se maneja según el eje X de un sistema de ejes coordenados. Llamaremos m_p y m_b las masas del proyectil y del bloque, respectivamente.

Si p_{ip} es la cantidad de movimiento inicial del proyectil y v_{ip} la velocidad antes de impactar sobre el bloque, se tiene, entonces, que la cantidad de movimiento del proyectil antes de incidir sobre el bloque es:

$$p_{ip} = m_p \cdot v_{ip} = 0,015 \text{ kg} \cdot 450 \text{ m/s} = 6,75 \text{ kgm/s}$$

Luego que el proyectil impacta al bloque, ambos se mueven a la misma velocidad v_f y la cantidad de movimiento final es igual a:

$$p_f = (m_p + m_b) \cdot v_f = (0,015 + 0,550) \cdot v_f$$

De acuerdo con la ley de la conservación de la cantidad de movimiento, y puesto que sobre el proyectil en movimiento no se ha aplicado ninguna fuerza externa, la cantidad de movimiento se conserva, es decir que $p_f = p_{ip}$. Por lo tanto, se tiene:

$$6,75 \text{ kgm/s} = (0,565 \text{ kg}) \cdot v_f \Rightarrow$$

$$v_f = \frac{6,75}{0,565} = 11,95 \text{ m/s}$$

b) Conocidas la velocidad inicial y final del proyectil, podemos usar la relación (13.5) para obtener el impulso ejercido por el bloque sobre el proyectil:

$$\begin{aligned} I_p &= m_p v_f - m_p v_{ip} = m_p (v_f - v_{ip}) = \\ &= 15 \cdot 10^{-3} (11,95 - 450) \text{ kgm/s} = -6,57 \text{ kgm/s} \end{aligned}$$

El impulso aplicado por el proyectil sobre el bloque está dado por:

$$I_b = m_b (v_f - v_{ib}) = 0,550 \cdot 11,95 = 6,57 \text{ kgm/s}$$

El resultado negativo del impulso ejercido por el bloque sobre el proyectil indica que este impulso se ha aplicado hacia la izquierda. El proyectil aplica sobre el bloque un impulso igual pero opuesto, lo cual es lógico ya que, al impactar al bloque, el conjunto se mueve como una sola partícula donde el centro de masa total se mueve con la misma velocidad.

13.4 FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS A UN SISTEMA

Un sistema puede estar constituido por una sola partícula o por un conjunto de partículas. Sobre el mismo pueden actuar tanto *fuerzas externas* como *fuerzas internas*.

Las fuerzas externas son fuerzas aplicadas exteriormente, con el resultado de que dichas fuerzas modifican la cantidad de movimiento; es decir, provocan el cambio en el estado del movimiento de un sistema, acelerándolo o retardándolo. Las fuerzas internas de un sistema son fuerzas que pueden aparecer como interacciones entre partes internas del mismo. Tales fuerzas tienen la característica de que las mismas, de acuerdo con la tercera ley del movimiento de Newton, se anulan o compensan por pares. Es decir, la partícula 1 ejerce una fuerza sobre la partícula 2 y la partícula 2 ejerce una fuerza sobre la partícula 1, dando como resultado que la suma total de todas las fuerzas internas es cero.

Por ejemplo, si subes a un carro que está estacionado y tratas de moverlo aplicando una fuerza hacia adelante sobre el volante, seguro que no lograrás moverlo ni un milímetro. Toda la fuerza aplicada es anulada por la fuerza de reacción del volante. Esta fuerza ejercida por ti sobre el volante y la fuerza de reacción de éste, son fuerzas internas, siendo el carro, en este caso, el sistema.

Refiriéndonos de nuevo al auto, si se desea moverlo, hay que bajarse del mismo para aplicarle una fuerza externa por la parte de atrás. Si se logra moverlo con la fuerza aplicada, ocurre, entonces, un cambio en la cantidad de movimiento del carro. De esto se desprende que si no hay una fuerza externa no es posible provocar un cambio en la cantidad de movimiento. Entonces, si existen interacciones internas en un sistema, las cantidades de movimiento de estas interacciones se cancelan por pares, como se describió antes, y al no existir la aplicación de una fuerza externa, la cantidad de movimiento permanece igual tanto al inicio de una interacción interna, como al finalizar dicha interacción.

13.5 COLISIONES EN SISTEMAS AISLADOS

La colisión entre dos cuerpos o sistemas puede describirse como una interacción de corta duración de magnitud significativa. El tiempo de la interacción debe ser tan pequeño que nos permita referirnos a un intervalo que cubre sólo el momento antes y después de la interacción. En la vida cotidiana las colisiones entre dos cuerpos ocurren en un intervalo de tiempo que oscila, aproximadamente, entre 10^{-3} s y 1 s.

Sabemos, por otra parte, que un *sistema aislado* es aquel sobre el cual no actúan fuerzas exteriores al mismo, siendo, por lo tanto, un sistema que, de acuerdo con la primera ley del movimiento de Newton, se mantendrá en reposo o en movimiento rectilíneo y uniforme. Las colisiones son de dos tipos: *elásticas* e *inelásticas*.

Colisiones elásticas

Son aquellas donde no ocurre una deformación permanente, ni se produce calor en los cuerpos que intervienen en la colisión. Las colisiones entre bolas de billar son ejemplo de colisiones elásticas. La cantidad de movimiento y la energía cinética en una colisión elástica se mantienen constantes.

Colisiones inelásticas

Son aquellas donde los cuerpos que entran en interacción sufren deformaciones permanentes y generan calor durante la colisión. La cantidad de movimiento se mantiene constante. La energía cinética varía en este tipo de colisiones.

Ejemplo 13.4

Un hombre, que utiliza un rifle de 3,5 kg de masa, ejecuta un disparo horizontalmente sobre un blanco como se muestra en la fig. 13.2. La bala, con una masa de 14 g, sale del cañón con una velocidad de 750 m/s. Calcula la velocidad de retroceso de la culata del rifle.

Solución

La fuerza que impulsa la bala es igual y opuesta a la fuerza que hace retroceder el rifle, de acuerdo con la tercera ley del movimiento de Newton. Por ser fuerzas internas del sistema rifle-bala, las mismas

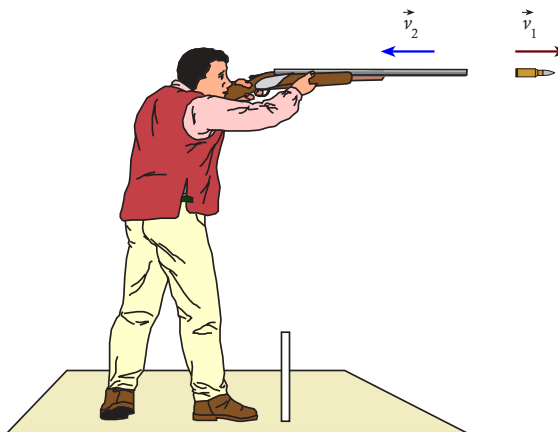


Fig. 13.2 Ejemplo 13.4. Cuando un rifle dispara una bala, la fuerza que impulsa la bala es igual y opuesta a la fuerza que hace retroceder la culata del rifle. Como estas fuerzas de acción y reacción son internas, las mismas no cambian la cantidad de movimiento del sistema rifle-bala.

no cambian la cantidad de movimiento de éste, de tal manera que antes del disparo, por estar en reposo el sistema rifle-bala, la cantidad de movimiento era cero y después del disparo la misma continuará siendo cero.

La cantidad de movimiento del rifle es igual y opuesta a la cantidad de movimiento de la bala, cuando ésta sale disparada; por lo tanto, vectorialmente se puede escribir que:

$$\sum \vec{p} = 0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

Como el disparo es horizontal, podemos escribir la ecuación anterior según la componente X en un sistema de ejes coordenados, tomando en cuenta que $\vec{v}_1 = v_1 \vec{i}$ y $\vec{v}_2 = -v_2 \vec{i}$:

$$\sum \vec{p} = m_1 v_1 \vec{i} - m_2 v_2 \vec{i} = 0 \Rightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2$$

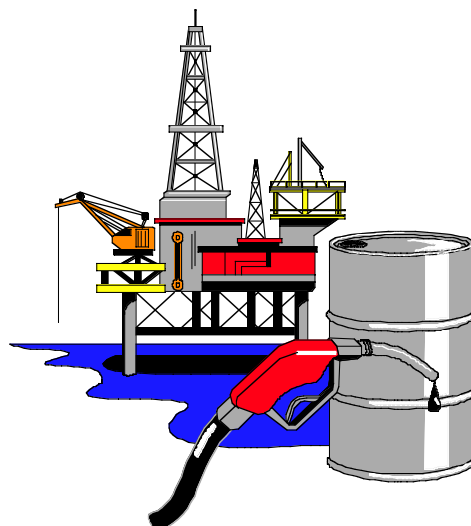
Despejando el valor de v_2 en la relación anterior:

$$v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2} = \frac{(14 \cdot 10^{-3} \text{ kg}) \cdot (750 \text{ m/s})}{3,5 \text{ kg}} = 3 \text{ m/s}$$

$$\vec{v}_2 = 3 \vec{i} \text{ m/s}$$

CAPÍTULO 14

Trabajo y Energía



14.1 EL CONCEPTO DE ENERGÍA. TIPOS DE ENERGÍA.

La palabra «energía» es utilizada con mucha frecuencia en nuestro diario quehacer. A menudo, oímos las expresiones: «ese niño tiene mucha energía», «el consumo de energía en los países en desarrollo tiende a disminuir por el uso de tecnologías más eficientes». Este vocablo, que ahora está tan difundido, es reciente en el campo de la Física y surgió de la prodigiosa capacidad de abstracción del ser humano. Poco a poco se entronizó en las distintas ramas de la ciencia, para convertirse en uno de los conceptos más importantes.

Fue a comienzos del siglo XIX cuando se comenzó a hablar de energía. Físicos como Leibniz, Carnot, Joule y Young desarrollaron el concepto y este último usó, por primera vez, la palabra «energía», a la cual definió como *la capacidad para realizar un trabajo*. Fue en esa época cuando se estableció la equivalencia entre energía mecánica y calor y, posteriormente, se amplió el término para aplicarlo a otros fenómenos físicos, que incluyen, entre otros, la energía electromagnética y la energía nuclear.

La energía es el motor fundamental de la existencia del hombre en el planeta Tierra. En la época actual la producción y refrigeración de alimentos, la iluminación de hogares y lugares públicos, el calentamiento o enfriamiento de los espacios en el hogar, el transporte están íntimamente ligados al concepto de energía.

Hasta finales del siglo XIX las principales fuentes de energía correspondían a la generada por el hombre y los animales, como producto del uso de la fuerza de tracción, y al calor originado en la quema de madera. Las caídas de agua y los molinos de viento, utilizados para la industria artesanal y el movimiento de barcos de vela representaban otros usos primitivos de la energía. Con la invención de la máquina de vapor, se dio un paso dramático en las fuentes de energía que impulsan el desarrollo en la actual sociedad.

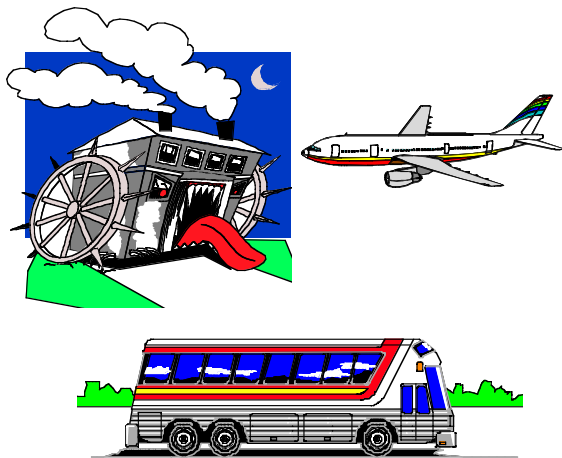
En el esquema energético que ha manejado el mundo de los siglos XX y XXI se habla de *energías no renovables* y *energías renovables*. Las energías no renovables son aquellas que, habiendo tardado millones de años en originarse, son consumidas por el hombre en un tiempo relativamente corto, sin que haya posibilidad de reponerlas en forma perentoria. Las principales fuentes de energía no renovables son el carbón, el petróleo, el gas y el uranio. A las tres primeras se les conoce con el nombre de *combustibles fósiles*, mientras que el uranio es el elemento químico básico de la *energía nuclear*. Aun cuando todos estos elementos han permitido un desarrollo espectacular de la sociedad actual, su procesamiento, para obtener productos útiles al desarrollo científico y tecnológico, ha originado graves desajustes ambientales.

Las energías renovables, conocidas también como

energías alternativas, son aquellas basadas en elementos cuyo procesamiento se puede realizar, en teoría, continuamente y, en términos generales, causan mucho menos daños a los ecosistemas. Como energías renovables podemos citar, entre otras, las siguientes:

- **Energía solar:** es, en realidad, el origen de todas las energías conocidas por el hombre. Los combustibles fósiles se formaron por la acción de la radiación solar sobre plantas y microorganismos que, al realizar la fotosíntesis, dieron lugar al carbón, el petróleo y el gas. El ciclo del agua, productor de la energía hidroeléctrica y gracias al cual es posible reciclar este elemento, tiene lugar debido a la evaporación del agua y su caída posterior en forma de lluvia o de nieve, en distintas regiones del planeta. Los vientos, fuente de la energía eólica, se producen por el calentamiento desigual que ocasionan los rayos solares sobre las masas de aire.

La energía solar se puede utilizar directamente para calentar agua, en la deshidratación de alimentos, en el secado de distintos objetos y para la generación de electricidad. En este último caso, hay dos métodos usados ampliamente. En uno de ellos, la energía solar se usa para convertir



En las distintas etapas de su desarrollo, el hombre ha hecho uso permanente de las fuentes de energía para facilitar las labores sociales.

agua en vapor, el cual mueve turbinas para la producción de electricidad. En el otro método, se hace uso del llamado *efecto fotoeléctrico*, mediante el uso de *células fotovoltaicas*. En ambos casos, la eficiencia de conversión de la energía solar es inferior al 20%, haciendo ineficientes estos sistemas de producción de energía eléctrica. Es importante resaltar que, a pesar de ser un país donde hay mucha radiación solar, en Venezuela no se ha difundido el uso de la energía solar. La abundancia de petróleo y gas ha limitado la utilización de este recurso natural.

- **Energía hidroeléctrica:** se ha venido usando desde hace mucho tiempo como fuente para generar electricidad. Aprovecha pronunciados desniveles de agua para hacer mover grandes turbinas en las llamadas centrales hidroeléctricas. En Venezuela se han construido significativas instalaciones hidroeléctricas para la generación de electricidad. Este tipo de energía puede producir relevantes impactos ambientales, como producto de la construcción de las represas en los cauces de los ríos.
- **Energía eólica:** desde hace muchos siglos los vientos han sido utilizados para mover las aspas de molinos y, de esta manera, realizar labores tales como el bombeo de agua, la molienda de granos y, en épocas recientes, los avances tecnológicos han permitido usarlos en la generación de electricidad, en aquellas zonas donde hay flujos frecuentes de masas de aire. Salvo por el impacto paisajístico, la energía eólica tiene bajo impacto ambiental.
- **Energía geotérmica:** el agua en el interior de la Tierra posee altas temperaturas y este hecho es aprovechado para generar electricidad, mediante las tecnologías apropiadas. Países como Nueva Zelandia o Islandia utilizan con ventaja esta fuente de energía. Para resultar eficiente, las profundidades a las cuales se obtienen altas temperaturas no deben ser muy grandes. El impacto ambiental que produce este tipo de

explotación energética deriva, fundamentalmente, de la contaminación térmica del sitio donde se establece la planta generadora de electricidad.

- **Energía de biomasa:** este tipo de energía proviene de la madera, desechos orgánicos, reciclaje de materiales, etc, y es renovable en la medida que las fuentes de origen sean conservadas. Esto implica, básicamente, la reforestación de bosques, el cuidado de las fuentes de agua y el reciclado de productos industriales. Dadas las grandes desigualdades en la distribución mundial de la riqueza, casi la mitad de la humanidad depende de la biomasa como fuente principal de energía. En algunos lugares se utiliza la biomasa para producir gas de uso doméstico. Los residuos orgánicos se acumulan en un depósito, donde fermentan debido a los microorganismos presentes. El gas producido se puede utilizar para calentar los alimentos. La producción de dióxido de carbono (CO_2), producto de la combustión de los gases puede ser equilibrado con la reforestación de bosques, de manera que los nuevos árboles retiren este gas de la atmósfera.

14.2 ENERGÍA Y DESARROLLO ECONÓMICO

Una visión general del desarrollo de los pueblos nos permite enlazar el consumo y producción de energía con el grado de avance tecnológico de los mismos. Las sociedades de alto nivel de progreso tienen, a la vez, un alto consumo de energía, a tal punto que, según datos de 1991, el 23% de la población mundial que habita en los países desarrollados consume el 73% de la energía usada en todo el mundo. Es decir, en promedio, cada persona de los países desarrollados utiliza alrededor de 10 veces más energía que un habitante de los países no desarrollados, en tanto que las zonas más empobrecidas del planeta aún dependen de la energía proveniente del carbón vegetal y la madera.

Resulta también paradójico que los países de mayor producción petrolera, entre los cuales se encuentra Venezuela, tengan un índice de desarrollo que no

guarda relación con los ingentes recursos recibidos por la explotación petrolera y gasífera. Por otro lado, países de baja producción petrolera, han alcanzado enormes avances en su calidad de vida.

14.3 ENERGÍA Y TRABAJO

Las leyes del movimiento de Newton se pueden utilizar para resolver los problemas de la Mecánica Clásica, pues conocidos los valores iniciales de la posición y la velocidad de un cuerpo, así como las fuerzas que actúan sobre el mismo, es posible predecir el movimiento que tendrá este cuerpo. Por ejemplo, si queremos saber el alcance de una pelota de beisbol disparada por un batazo con un determinado ángulo con la horizontal del terreno, apelamos a las ecuaciones deducidas en Cinemática sobre el movimiento de proyectiles, donde, conocidas la velocidad inicial con que sale la bola y el ángulo de disparo, podemos llegar a resolver el problema planteado. Sin embargo, en la mayoría de las situaciones prácticas, es difícil disponer de información suficiente sobre el número de fuerzas que intervienen en el comportamiento de un sistema, además de que pueden existir fuerzas de acción variable, donde las aceleraciones serán igualmente variables, por lo que la aplicación de las leyes del movimiento de Newton puede resultar un proceso difícil y complejo.

Un enfoque diferente para la solución de los problemas de la mecánica, sin necesidad de utilizar las leyes del movimiento de Newton, se encuentra en la aplicación de los conceptos de *trabajo y energía*, que, desarrollados a partir de las leyes del movimiento de Newton, permiten mayor flexibilidad en el tratamiento de casos complejos.

En la ciencia Física, el concepto de trabajo está indisolublemente ligado al de energía. Recordemos que el concepto de energía se tiene como uno de los más importantes de la ciencia en general y en la Física es de importancia capital, ya que, en base a la aplicación de los conocimientos sobre la energía y el trabajo, se pueden resolver muchos problemas de la Mecánica.

Adicionalmente a esto, es importante resaltar que modernamente la energía ha adquirido tal

preponderancia que este nombre ha devenido como el más popular concepto científico de la humanidad. A modo de ejemplo ilustrativo sobre la popularidad del término energía, podemos constatar cotidianamente que una persona suele expresar, luego de una *jornada de trabajo*, como es el hecho de levantar bultos para llevarlos de un piso a otro de un edificio, que está extenuado y con hambre. Esta situación lo lleva a concluir que ha perdido energía y a pensar que, para recuperarla, necesita descansar y comer. Efectivamente, al ingerir los alimentos la persona siente recuperada su energía; es decir, se siente con capacidad para iniciar un nuevo ciclo de trabajo. De la descripción anterior sobre la popularidad del importante término energía, brota de inmediato una conclusión de corte científico, pues cuando la persona ingiere alimentos, de alguna manera la *energía de los alimentos se ha transferido a la persona y, luego, dicha energía se transfiere a los bultos para levantarlos y transportarlos*.



Para levantar su pesada carga, el hombre realiza un trabajo que le resta energía. Para reponerla, ingiere los alimentos necesarios.

La energía no puede ser medida en forma directa; sólo se pueden medir cambios en la misma. En consecuencia, la medida de los cambios de la energía de un cuerpo o sistema, representa una medida del cambio físico del mismo. Como se ha dicho arriba, los conceptos de trabajo y energía están basados en las leyes del movimiento de Newton. Entonces, en los cambios en la energía de un sistema, *la fuerza se presenta como la causa del cambio y la energía representa la medida de dicho cambio*, y debido a que un sistema es posible cambiarlo por la aplicación de diferentes fuerzas, existen, en consecuencia, diversas formas de cambio del sistema. Es decir, existen diversas manifestaciones de la energía. Hemos mencionado la energía solar, representada por la radiación luminosa que el Sol nos suministra día a día; la energía eléctrica, que nos permite alumbrarnos noche

a noche; la energía química contenida en alimentos y sustancia inertes como los combustibles derivados del petróleo; la energía térmica, que permite el funcionamiento de turbinas de vapor para la generación de electricidad.

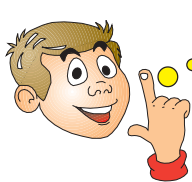
Una de las propiedades más importantes de la energía es que la misma puede transformarse de una forma a otra. Cuando una turbina es movida por la presión de vapor, generada a partir de la energía térmica, podemos obtener electricidad, que es otra de las formas de la energía. En todos los procesos, bien sean estos naturales o producto de la actividad del hombre, la energía se conserva. Es decir, cuando una forma de energía se transfiere a otra, la energía total en este proceso se mantiene inalterada. Si un cuerpo pierde energía es porque está transfiriendo a otro esa energía. En conclusión: la energía total del Universo permanece sin alteración alguna. A esto se le conoce como la Ley de la Conservación de la Energía.

Es muy importante aclarar que la energía no tiene existencia real individual como una sustancia. Es, simplemente, un concepto abstracto. Se le define, en general, como *la capacidad que tiene un cuerpo o sistema de realizar un trabajo. La energía es una cantidad escalar y la misma está asociada, en menor o mayor grado, con todas las partículas y cuerpos existentes en la naturaleza*.

14.4 TRABAJO

La palabra trabajo es uno de los vocablos para los cuales la Física tiene una definición precisa, la cual es totalmente diferente a los diversos significados que tiene en la vida cotidiana. Por ejemplo, cuando una persona dice: "me costó mucho trabajo lograr el empleo actual", quiere decir, entre otras cosas, que fue persistente en su empeño de conseguirlo, pero desde el punto de vista de la Física no realizó ningún trabajo. También cuando empuja un carro que está atascado y no lo logra, normalmente una persona dice: "a pesar del trabajo que hice, no logré moverlo ni un centímetro". Igualmente, desde el punto de vista de la Física, no ha realizado ningún trabajo.

El concepto de trabajo fue introducido en la Física en el año 1829 por Gaspard Coriolis (ingeniero y matemático francés, 1792-1843), quien utilizó esta expresión para denominar al producto de una fuerza constante aplicada a un cuerpo, por la distancia recorrida por dicho cuerpo. El vocablo "trabajo" se ha mantenido en la Física, desde entonces, y su definición actual es como sigue:



Trabajo es el producto de la magnitud de una fuerza o la componente de una fuerza, aplicada a un cuerpo, por el desplazamiento de ese cuerpo en la dirección de la fuerza o de su componente.

Refiriéndonos a la fig. 14.1, si el hombre aplica a la carretilla una fuerza F y logra desplazarla una distancia d en la dirección de la fuerza, el trabajo se define como:

$$T = F \cdot d \quad (14.1)$$

donde F es la magnitud de la fuerza aplicada que causa el desplazamiento y d es el desplazamiento del cuerpo en la *dirección de la fuerza*. Para que se efectúe un trabajo, desde el punto de vista de la Física, se requiere la aplicación de una fuerza sobre un cuerpo y que el mismo se desplace por la acción de esta fuerza.

El trabajo, T , es una cantidad escalar, cuya expresión vectorial está dada por:

$$T = \vec{F} \cdot \vec{d} \quad (14.2)$$

donde $\vec{F}$ es la fuerza aplicada y $\vec{d}$ es el vector desplazamiento. La relación anterior corresponde

al producto escalar o producto punto de los vectores $\vec{F}$ y $\vec{d}$ y puede expandirse, según la siguiente relación:

$$T = fd \cos \theta \quad (14.3)$$

en la cual θ es el ángulo formado por el vector fuerza con el vector desplazamiento.

La unidad de trabajo en el SI es el joule o julio (J), en honor a James Prescott Joule (físico británico, 1818-1889) y de acuerdo con la relación (14.1) el J se define como:

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ Newton} \cdot 1 \text{ m} \Rightarrow J = \text{N} \cdot \text{m}$$

es decir,

Un Joule (J) es el trabajo realizado por una fuerza, cuya magnitud es de 1 Newton, cuando desplaza un cuerpo a la distancia de 1 metro en la dirección de la fuerza.

Ejemplo 14.1

Si en la fig. 14.1, la fuerza aplicada a la carretilla es 18 N y la misma la mueve 5 metros, ¿cuál es el trabajo efectuado sobre la carretilla.

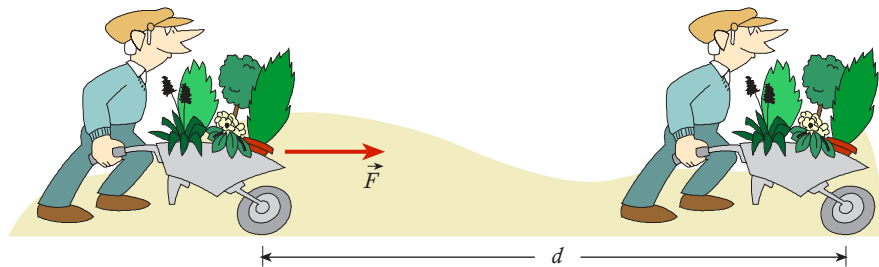
Solución

El trabajo efectuado sobre el bloque, según la relación (14.3) es:

$$T = F \cdot d \cdot \cos \theta = 18 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} \cdot \cos 0^\circ = 90 \text{ J}$$

Observa que, en este caso, el ángulo entre el vector fuerza y el vector desplazamiento es de cero grados. Hemos dicho antes que para que se realice trabajo,

Fig. 14.1 La fuerza constante de magnitud F , aplicada sobre la carretilla, realiza un trabajo sobre la misma al desplazarla una distancia d .



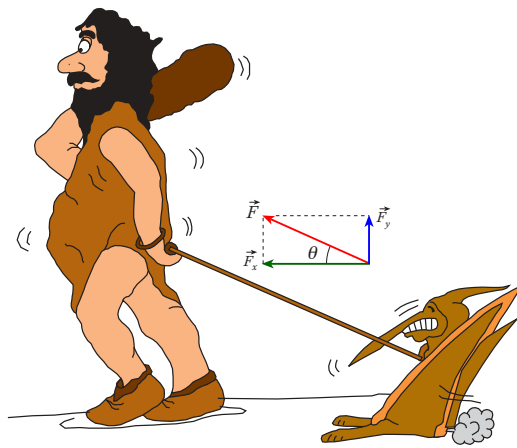


Fig. 14.2 La fuerza aplicada sobre el animalito forma un ángulo con la horizontal. El trabajo realizado por $\vec{F}$ se debe sólo a su componente horizontal, F_x , ya que es la única fuerza que actúa en la misma dirección del desplazamiento. El trabajo realizado por F_x es igual a $F_x \cdot d \cdot \cos \phi$.

el cuerpo sobre el que se aplica una fuerza debe moverse en la dirección de la fuerza o del componente de la misma que tenga su dirección. Consideremos la fig. 14.2, donde la fuerza aplicada forma un ángulo θ con la horizontal o dirección del movimiento. Debido a su carácter vectorial, la fuerza puede descomponerse en sus componentes rectangulares F_x y F_y . La acción de la componente vertical, F_y , trata de levantar al animalito, con lo cual disminuye la fuerza de roce, pero como no logra moverlo hacia arriba, no se realiza ningún trabajo en la dirección vertical. En cambio, la componente F_x sí mueve al pajarito en su dirección X. Por lo tanto, realiza un trabajo. El trabajo realizado, en este caso, se calcula usando la relación (14.3).

14.5 TRABAJO POSITIVO Y TRABAJO NEGATIVO

Considera la fig. 14.3, donde una caballo tira una carreta. La fuerza aplicada por el caballo mueve la carreta en la dirección de la fuerza, por lo tanto realiza un trabajo. Un trabajo de esta naturaleza, donde el objeto o cuerpo se mueve en la dirección de la fuerza, se dice que es un *trabajo positivo*. En general, cuando el punto de aplicación de una fuerza sobre un cuerpo se mueve en la dirección de la fuerza, se dice que se realiza un trabajo positivo. En cambio, la fuerza

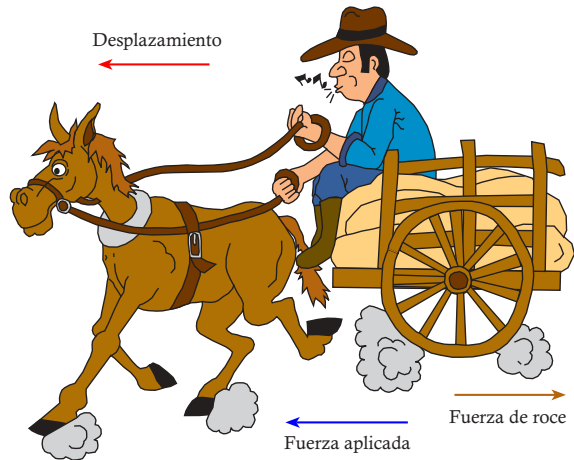


Fig. 14.3 El trabajo realizado por la fuerza del caballo sobre la carreta, en la misma dirección del desplazamiento, es positivo. En cambio, el trabajo realizado por la fuerza de roce, que se opone al movimiento, es negativo.

de fricción cinética que se opone al movimiento de la carreta, realiza un *trabajo negativo* sobre la misma.

En términos de la ecuación (14.3), el trabajo realizado por la fuerza de fricción sobre las ruedas de la carreta es:

$$f_{\mu} \cdot d \cdot \cos \phi = f_{\mu} \cdot d \cdot \cos 180^{\circ} = f_{\mu} \cdot d \cdot (-1) = -f_{\mu} \cdot d$$

Observa que el ángulo entre las fuerzas del caballo y de roce es de 180° .

14.6 TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA DE GRAVEDAD

La fig. 14.4 muestra un bloque que se desplaza hacia arriba sobre un plano inclinado sin rozamiento. El trabajo realizado sobre el bloque por la fuerza de la gravedad (recuerda que la fuerza de la gravedad actúa siempre hacia abajo), lo realiza la componente de esa fuerza, que actúa en dirección contraria al movimiento del bloque. Este trabajo será, entonces, un trabajo negativo. En la fig. 14.4 se indican los módulos de las fuerzas actuantes sobre el bloque, así como la longitud, d , recorrida por el mismo. Para efectos de los cálculos, se elige un sistema de coordenadas con el origen en el centro de masa del bloque, cuando se encuentra en la parte más baja.

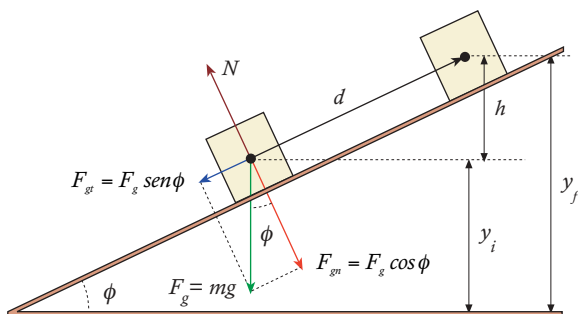


Fig. 14.4 El trabajo realizado por la fuerza de gravedad, por medio de su componente $F_g \sin \phi$ es negativo, pues esta componente actúa en dirección contraria al movimiento ascendente del bloque.

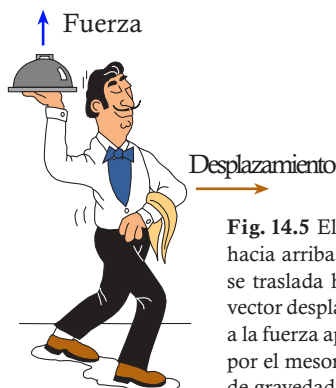


Fig. 14.5 El mesonero aplica una fuerza hacia arriba sobre la bandeja, mientras se traslada horizontalmente. Como el vector desplazamiento es perpendicular a la fuerza aplicada, el trabajo realizado por el mesonero, en contra de la fuerza de gravedad, es igual a cero.

La componente F_{gn} no realiza trabajo alguno, ya que el bloque no se mueve perpendicularmente al plano. La componente de la fuerza de la gravedad que realiza trabajo es, según la fig. 14.4, igual a:

$$F_{gt} = F_g \sin \phi = mg \sin \phi \quad (14.4)$$

El trabajo realizado por esta fuerza sobre el bloque es:

$$T_g = -mg d \sin \phi \quad (14.5)$$

De la figura 14.4, observamos que:

$$h = y_f - y_i = d \sin \phi \quad (14.6)$$

Sustituyendo en (14.6) se tiene:

$$T_g = -mg(y_f - y_i) \quad (14.7)$$

Si el bloque se desplazara en sentido contrario, el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad será positivo y su expresión matemática, intercambiando en la fig. 14.4 las ordenadas, será:

$$T_g = mg(y_i - y_f) \quad (14.8)$$

De las relaciones (14.7) y (14.8) se desprende que el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad sobre un cuerpo, es independiente de la trayectoria seguida y depende sólo de las coordenadas verticales inicial y final. Se puede deducir, además, que cuando el desplazamiento del cuerpo sea una trayectoria cerrada, donde $y_i = y_f$, el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad será cero.

Si un objeto se traslada con movimiento uniforme y la fuerza aplicada sobre el mismo es perpendicular a la dirección del movimiento, dicha fuerza no realiza ningún trabajo sobre el objeto. En la fig. 14.5, un mesonero camina con velocidad uniforme, llevando sobre sus hombros una bandeja de alimentos. La fuerza $\vec{F}$, ejercida por el hombre sobre la caja, es vertical, perpendicular a la dirección del vector velocidad $\vec{v}$ con que se desplaza. De acuerdo con la relación (14.3) se tiene:

$$T = Fd \cos \phi = Fd \cos 90^\circ = 0$$

14.7 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL TRABAJO

El trabajo realizado por la aplicación de una fuerza sobre un cuerpo puede tener una representación gráfica, como se puede ver en la fig. 14.6. Si en un sistema de coordenadas rectangulares, sobre el eje de las Y llevamos los valores de la fuerza aplicada y sobre el eje de las X los valores del desplazamiento,

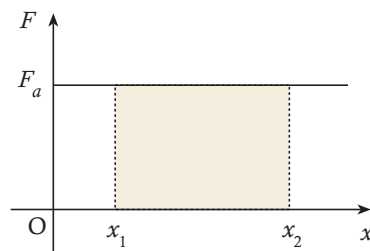


Fig. 14.6 Representación gráfica del trabajo realizado por una fuerza constante cuando se desplaza desde x_1 hasta x_2 . El área del rectángulo rayado corresponde al trabajo realizado por F_a .

el área bajo la curva fuerza - desplazamiento es la representación gráfica del trabajo realizado. Como se puede ver, si se incrementan simultáneamente tanto el largo del rectángulo (magnitud del desplazamiento) como la altura (magnitud de la fuerza), se incrementa el trabajo. Igualmente, si cualquiera de estas magnitudes se incrementa por separado, el trabajo realizado se incrementa.

Ejemplo 14.2

Un esquiador de masa 60 kg es halado con una cuerda, con una tensión de 275 N, sobre una colina que tiene una pendiente de inclinación 15° en relación a la horizontal, como se muestra en la figura 14.7. La cuerda que hala al esquiador tiene una dirección de 30° con relación a la inclinación de la colina. Si el coeficiente de fricción entre los esquís y el terreno es de 0,15, determina el trabajo realizado por cada fuerza que interviene en el sistema y el trabajo total hecho sobre el esquiador, si éste se desplaza 25 m por la pendiente.

Solución

Debemos, en primer lugar, calcular el módulo de la fuerza normal $\vec{N}$ para poder determinar el módulo de fuerza de fricción $\vec{F}_\mu$. De acuerdo con el diagrama de cuerpo libre de la fig. 14.8 se tiene:

$$\sum F_y = T \sin 30^\circ + N - mg \cos 15^\circ = 0$$

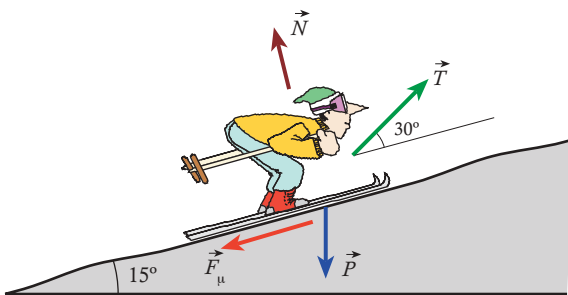


Fig. 14.7 Ejemplo 14.2. Sobre el esquiador actúan las 4 fuerzas mostradas en la figura: la tensión $\vec{T}$, la normal $\vec{N}$, la fuerza de gravedad $\vec{P}$ y la fuerza de fricción $\vec{F}_\mu$. La fuerza de tensión realiza un trabajo positivo sobre el esquiador, mientras que las fuerzas de gravedad y de fricción realizan trabajos negativos, ya que se oponen a la tensión $\vec{T}$.

Despejando N :

$$N = mg \cos 15^\circ - T \sin 30^\circ$$

Sustituyendo valores:

$$N = 60 \cdot 9,8 \cdot 0,97 - 275 \cdot 0,50 = 432,86 \text{ N}$$

El valor de F_μ es:

$$F_\mu = \mu \cdot N = 0,15 \cdot 432,86 = 64,93 \text{ N}$$

Trabajo realizado por la fuerza de tensión:

$$T_T = T \cdot d \cdot \cos 30^\circ = 275 \cdot 25 \cdot 0,87 = 5.953,92 \text{ J}$$

Trabajo realizado por la fuerza de fricción:

$$T_{F_\mu} = \vec{F}_\mu \cdot \vec{d} = -64,93 \cdot 25 = -1.623,25 \text{ J}$$

Trabajo realizado por la fuerza normal:

$$T_N = \vec{N} \cdot \vec{d} = N \cdot d \cos 90^\circ = 0 \text{ J}$$

Trabajo realizado por la fuerza de la gravedad:

$$\begin{aligned} T_g &= \vec{P} \cdot \vec{d} = m\vec{g} \cdot \vec{d} = -mg d \sin 15^\circ = \\ &= -60 \cdot 9,8 \cdot 25 \cdot 0,26 = -3.822 \text{ J} \end{aligned}$$

Trabajo total realizado sobre el esquiador:

$$T = T_T + T_{F_\mu} + T_N + T_g = 508,67 \text{ J}$$

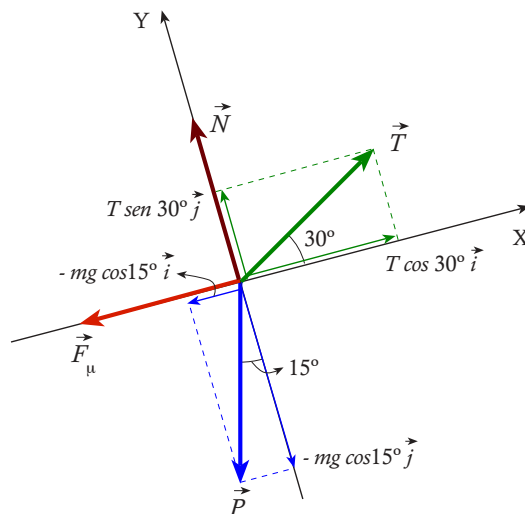


Fig. 14.8 Ejemplo 14.2. Diagrama de cuerpo libre de las fuerzas que actúan sobre el esquiador.

14.8 TRABAJO REALIZADO POR UNA FUERZA VARIABLE

Cuando estudiamos los diferentes tipos de fuerza de contacto, se describió el caso de las fuerzas del tipo elástico, consecuencia de la propiedad de elasticidad o recuperación de la forma original que tienen los cuerpos en la naturaleza, luego que los mismos sufren una deformación por la interacción con otros cuerpos. Fue el físico británico Robert Hooke, el primero que estudió la deformación de los cuerpos elásticos, cuando se les aplica una fuerza, descubriendo la relación que existe entre la fuerza ejercida por un resorte ideal y la variación en su longitud, al estirarlo o comprimirlo. Esta relación se conoce como la *ley de Hooke* y la misma se expresa matemáticamente como:

$$F_x = -kx \quad (14.9)$$

Donde F es la fuerza elástica del resorte, k se denomina *constante del resorte*, la cual se mide en N/m y la cantidad x es el *desplazamiento* o *elongación* del resorte desde su posición de equilibrio o posición natural. El signo negativo indica que la fuerza elástica del resorte siempre se opone a su estiramiento o compresión; es decir esta fuerza siempre tiende a restituir la posición de equilibrio del resorte, y la dirección de la misma se ejercerá siempre a lo largo del resorte.

La fig. 14.9(a) muestra la posición natural de un resorte y un bloque unido en el extremo libre del resorte. En esta posición, como se muestra, $x = 0$ y el resorte no ejerce fuerza alguna sobre el bloque, pues:

$$F_x - k \cdot 0 = 0$$

En la fig. 14.9(b) el bloque comprime al resorte y se desplaza a la izquierda de $x = 0$, siendo, por lo tanto, $x < 0$. F_x es, entonces, positiva, y la misma tenderá a devolver el bloque a su posición original, $x = 0$.

Cuando el bloque se desplaza hacia la derecha, fig. 14.9(c), el resorte se estira y, como consecuencia, $x > 0$. En este caso, F_x es negativa y tratará de devolver al bloque a su posición natural o de equilibrio, correspondiente a $x = 0$.

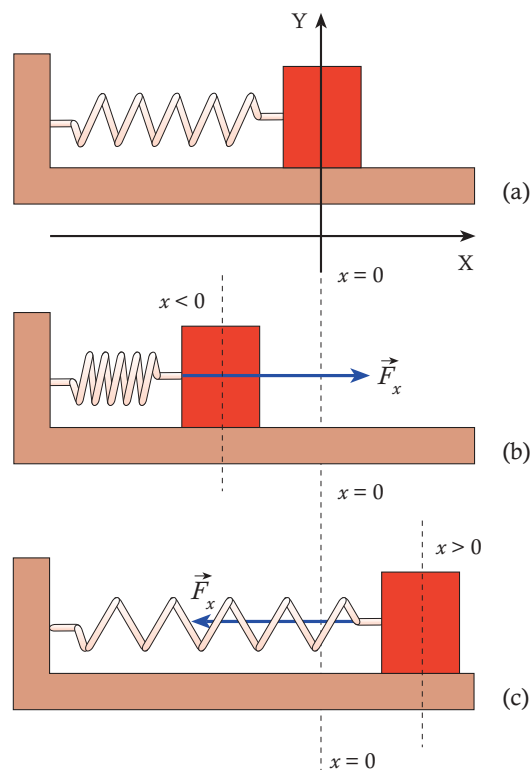


Fig. 14.9 (a) El resorte no produce fuerza sobre el bloque porque está en su posición de equilibrio. (b) El resorte ejerce una fuerza positiva sobre el bloque, puesto que siendo $x < 0$, el resorte tiende a llevar al bloque a su posición original de equilibrio ($x = 0$). (c) El resorte ejercerá una fuerza negativa sobre el bloque al tratar de llevarlo a su posición de equilibrio.

La fig. 14.10 muestra el comportamiento del resorte, según la ley de Hooke. De la figura, se puede ver que el trabajo realizado por el resorte sobre un cuerpo con el que interactúa, cuando se desplaza desde x_i a x_f , es el área correspondiente al trapecioide $x_i x_f ab$. El área del trapecioide es la diferencia entre las áreas del triángulo $Ox_f b$ y el triángulo $Ox_i a$. Entonces, el trabajo en el desplazamiento $x_i - x_f$ es:

$$T = \frac{1}{2} F_2 x_f - \frac{1}{2} F_1 x_i \quad (14.10)$$

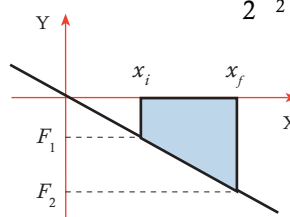


Fig. 14.10 Cuando el resorte se desplaza desde el punto x_i hasta el x_f , realiza un trabajo representado por el área del trapecioide mostrado.

Sustituyendo las fuerzas según la relación (14.10), se tiene:

$$T = -\frac{1}{2}kx_f^2 + \frac{1}{2}kx_i^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2) \quad (14.11)$$

Dado que la dirección de la fuerza del resorte siempre es contraria al desplazamiento del mismo, el trabajo realizado por éste siempre aparecerá con el signo negativo. Por otra parte, la relación (14.12) muestra que el trabajo realizado por la fuerza de un resorte ideal depende sólo de sus posiciones inicial y final. Además, si la trayectoria que realiza el resorte es cerrada, es decir, si el mismo vuelve a su punto inicial, donde $x_i = x_f$, el trabajo realizado por éste es cero.

14.9 ENERGÍA CINÉTICA

Cuando un cuerpo inicia un movimiento, en cierto modo se le ha aplicado algún tipo de fuerza, bien sea ésta una fuerza de *contacto* como cuando se golpea con el pie un balón de fútbol, o bien una fuerza de *campo*, como la fuerza gravitacional que se ejerce entre dos cuerpos. Se considera que un cuerpo tiene la capacidad de realizar un trabajo, es decir, tiene la capacidad de ejercer fuerzas sobre otros cuerpos, cuando al mismo se le ha aplicado una fuerza y éste se desplaza una distancia. Esa capacidad que tiene un cuerpo de realizar un trabajo se denomina *energía* y la misma puede ser transferida por un medio totalmente mecánico, como es la aplicación de una fuerza exterior.

El trabajo, en general, es la transferencia de energía por procedimientos totalmente mecánicos, es decir una transferencia de energía debido a la aplicación de una fuerza sobre un cuerpo que se mueve por la acción de dicha fuerza. Así, llegamos a concluir que *un cuerpo que se mueve tiene energía*. Esta energía, debida al movimiento, recibe en Física el nombre de *energía cinética*. Esta denominación fue introducida por Lord Kelvin en 1849 (físico inglés, 1824-1907).

La figura 14.11 muestra un bloque que se desplaza bajo la acción de la fuerza neta constante $\vec{F}_{\text{neto}}$. Siendo la fuerza constante, el bloque se moverá con aceleración constante, de acuerdo con la segunda ley

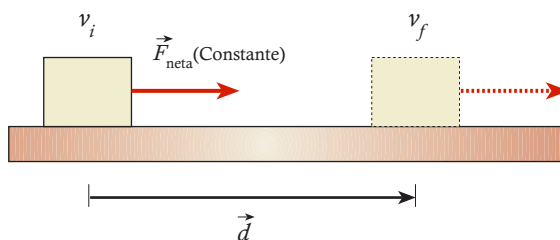


Fig. 14.11 Un bloque se desplaza bajo la acción de una fuerza constante, la cual causa un cambio de la velocidad que, a su vez, da origen a una variación de la energía cinética del bloque.

del movimiento de Newton. El trabajo neto realizado por la fuerza neta, cuando el bloque se desplace una distancia d será:

$$T_{\text{neto}} = \vec{F}_{\text{neto}} \cdot \vec{d} \quad (14.12)$$

Hay que hacer énfasis que el trabajo neto se refiere a aquel realizado por la resultante de todas las fuerzas que se aplican sobre el bloque. En este caso, la fuerza neta, $\vec{F}_{\text{neto}}$, será la resultante entre una fuerza exterior aplicada y la fuerza de roce, si ésta existe. Teniendo en cuenta que $F = ma$, la relación anterior nos queda como:

$$T_{\text{neto}} = m \cdot a \cdot d \quad (14.13)$$

Para un movimiento con aceleración constante, las siguientes relaciones pueden aplicarse:

$$a = \frac{v_f - v_i}{t} \quad d = \frac{1}{2}(v_f + v_i)t \quad (14.14)$$

donde v_i corresponde a la velocidad cuando $t = 0$ y v_f es la velocidad correspondiente al tiempo t . Sustituyendo estas relaciones en (14.14):

$$T_{\text{neto}} = m \cdot \left(\frac{v_f - v_i}{t} \right) \cdot \left[\frac{1}{2}(v_f + v_i)t \right]$$

$$T_{\text{neto}} = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$

Finalmente, podemos escribir:

$$T_{\text{neto}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (14.15)$$

La cantidad $\frac{1}{2}mv^2$ se denomina en física *energía*

cinética y es un escalar. Como se puede ver, es una energía que está asociada al movimiento del cuerpo o partícula. De acuerdo a esta relación, la energía cinética de una partícula depende de su masa y de su velocidad y su valor cuantitativo viene dado por la ecuación:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \quad (14.16)$$

La energía se expresa en las mismas unidades del trabajo. Es decir, en julios. La relación (14.16) puede escribirse como:

$$T_{\text{neto}} = E_{cf} - E_{ci} = \Delta E_c \quad (14.17)$$

Esta relación expresa que *el trabajo neto (T_{neto}) realizado por la aplicación de la resultante de todas las fuerzas que interactúan sobre una partícula es igual al cambio de la energía cinética de la partícula*. La ecuación (14.17) es conocida como el *teorema del trabajo y la energía cinética*. De esa relación podemos establecer que si el trabajo neto sobre una partícula es positivo, su velocidad aumentará y, por consiguiente, también su energía cinética.

Cuando un futbolista golpea un balón desde un saque de esquina, la fuerza ejercida sobre el balón está en la misma dirección del movimiento, por lo tanto se realiza un trabajo positivo neto, con lo cual el balón incrementa su energía cinética. Igualmente, si el trabajo neto es negativo, la velocidad disminuirá y por consiguiente disminuirá la energía cinética de la partícula. Cuando el portero en un juego de fútbol atrapa un disparo de balón, el trabajo neto realizado es negativo, pues la fuerza ejercida por el portero sobre el balón está en dirección contraria del movimiento, por lo cual la energía cinética disminuye, hasta hacerse cero, cuando el balón adquiere su reposo definitivo en las manos del portero.

En relación al cuadrado de la velocidad, que aparece en la ecuación de la energía cinética, observa que si se duplica la velocidad de un auto, la energía cinética de dicho auto se cuatricula. Suponga que el auto tiene una masa de 1.200 kg y lleva una velocidad de 72 km/h (20 m/s); la energía cinética

será:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1.200 \text{ kg} \cdot 20^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 240.000 \text{ J}$$

Si se duplica la velocidad, es decir si $v = 40 \text{ m/s}$, entonces:

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \cdot 1.200 \text{ kg} \cdot 40^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 960.000 \text{ J}$$

Si un automóvil marcha a la velocidad de 20 m/s, su energía cinética será cuatro veces mayor si el mismo se desplaza a 40 m/s y si al auto de repente se le aplican los frenos, el mismo deslizará una distancia cuatro veces mayor que si viajara a 20 m/s, lo cual se debe a que su velocidad está elevada al cuadrado, según la ecuación de la energía cinética.

Ejemplo 14.3

Una caja de libros es desplazada, mediante una cuerda, sobre una superficie lisa ($\mu = 0$). La caja tiene una masa de 20 kg y se le aplica una fuerza de 15 N a partir de su estado de reposo. Calcular: **a.)** La velocidad de la caja cuando la misma se ha desplazado 4 m. **b.)** La aceleración de la caja al final del desplazamiento.

Solución

a) Dado que la caja se desplaza sólo en forma horizontal, la única fuerza externa que actúa es la fuerza de 15 N. El trabajo neto realizado por esta fuerza es:

$$T_{\text{neto}} = F \cdot d = 15 \cdot 4 = 60 \text{ J}$$

Mediante (14.15), determinamos la velocidad final de la caja, tomando en cuenta que $v_i = 0$:

$$mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \Rightarrow T_{\text{neto}} = \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2T_{\text{neto}}}{m}}$$

Sustituyendo valores:

$$T_{\text{neto}} = \frac{1}{2}mv_f^2 = \sqrt{\frac{2 \cdot 60}{20}} = 2,45 \text{ m/s}$$

b) Dado que $v_i = 0$, la aceleración de la caja al final

del desplazamiento se obtiene de la forma siguiente:

$$v_f^2 = v_i^2 + 2ad \Rightarrow a = \frac{v_f^2}{2d} = \frac{2,45^2}{2 \cdot 4} = 0,75 \text{ m/s}^2$$

14.10 POTENCIA

En la descripción del concepto de trabajo, no se ha mencionado el tiempo requerido para desplazar un cuerpo. Si un obrero de la construcción requiere llevar 9 ladrillos desde la planta baja de un edificio en construcción, hasta el segundo piso, el trabajo requerido para realizar esta tarea es el mismo si el obrero carga de una sola vez los 9 ladrillos y los sube en un tiempo determinado o si decide llevarlos de tres en tres, con lo cual puede durar más tiempo en completar ese trabajo. Si el obrero opta por llevar los ladrillos de una sola vez, seguramente que se sentirá fatigado cuando llegue al sitio donde debe dejarlos; en cambio, si los lleva en tres porciones, se sentirá menos fatigado. Esta situación de mayor fatiga, cuando lleva los ladrillos de una sola vez, se debe a que el obrero ha tenido que transferir a los ladrillos, para trasladarlos, una cantidad de energía de su cuerpo, en un tiempo significativamente menor, en comparación con el segundo caso, donde transfiere la misma cantidad de energía, pero en un tiempo mayor. Esta diferencia se puede comprender si introducimos el concepto de *potencia*, que relaciona el trabajo o la transferencia de energía con la rapidez con la cual se pueden realizar el trabajo o la transferencia de energía.

En Física se define potencia como la rapidez con la cual se efectúa un trabajo o la rapidez con la cual se transfiere energía. Si un motor hace la misma cantidad de trabajo que otro, pero en la mitad del tiempo, se dice que tiene el doble de potencia. En términos matemáticos la potencia se define como:

$$P = \frac{T}{t} \quad (14.18)$$

donde T es el trabajo realizado por el cuerpo y t es el tiempo empleado en realizar ese trabajo. La unidad de potencia en el SI se denomina *vatio* (W) en honor a James Watt (Ingeniero mecánico inglés, 1736-1819) y la misma se expresa como J/s.

Un vatio es, entonces, el trabajo de un joule realizado por un cuerpo en un segundo o, bien, es la transferencia de energía de un joule en un segundo. Un motor que realiza un trabajo de un joule en un segundo tiene la potencia de un vatio.

Otra unidad de potencia es el *caballo de potencia* (horse power, *hp*, por sus siglas en Inglés), la cual es corrientemente empleada para designar la potencia de motores eléctricos. Su valor en vatios es:

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$$

El término vatio nos es bastante familiar, pues cuando vamos a comprar un bombillo corriente lo especificamos en esta unidad, siendo los más comunes los bombillos de 60, 75 y 100 vatios. Un bombillo que tiene una potencia de 100 vatios, transforma 100 julios de energía eléctrica en energía térmica y luz (radiación), en 1 segundo.

El vatio es una unidad de potencia muy pequeña. Por eso, con frecuencia se utiliza el kW que equivale a 1.000 vatios. Es común leer en el recibo mensual del cobro de la electricidad, la expresión kilovatio-hora (kWh). *Esta expresión significa energía (trabajo).* Esto es importante tenerlo claro: lo que se compra a la compañía de electricidad es energía y no potencia. Para aclarar esto, recuerda que la potencia se formula como $P = T/t$. Como $T = Pt$, al expresarse P en kW y t en horas, el trabajo resulta en kWh, que es una unidad de energía. En otras palabras, un *kilovatio hora es la energía que, en cada hora, se consume o se convierte en otra forma como calor y radiación, a un ritmo constante de un kilovatio.*

El kWh lo podemos expresar en julios como sigue:

$$1 \text{ kWh} = 10^3 \text{ W} \cdot 3.600 \text{ s} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Por ejemplo, la energía eléctrica consumida por un bombillo con una potencia de 75 vatios, expresada julios será:

$$E = 0,075 \cdot 10^3 \cdot 3,6 \cdot 10^3 \text{ J} = 0,27 \cdot 10^6 \text{ J}$$

Recuerde que el kWh es la unidad utilizada para expresar el consumo de energía de los aparatos o equipos eléctricos domésticos.

14.11 ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA

Un cuerpo puede almacenar energía de acuerdo a la posición donde se encuentre, energía que le ha sido transferida, de algún modo, por un agente externo. Supongamos que tenemos que subir una caja desde el suelo hasta una mesa. El peso que sentimos, al levantar la caja, no es más ni menos que la fuerza con la cual la gravedad atrae la caja hacia el centro de la Tierra. Al levantar la caja y ponerla sobre la mesa realizamos un trabajo. Este trabajo será positivo, ya que la dirección de nuestra fuerza está en la misma dirección del movimiento. Desde el punto de vista de la fuerza de la gravedad, ésta realiza también un trabajo igual, el cual será negativo, puesto que la dirección de esta fuerza está en dirección contraria al movimiento. Luego que situamos la caja sobre la mesa, si por cualquier circunstancia la caja cae al piso, puede realizar un trabajo, empujando o aplastando algo que encuentre en su línea de caída. Esto quiere decir que, estando la caja sobre la mesa, la misma tiene el potencial de realizar un trabajo. Este potencial le ha sido transferido por el trabajo realizado sobre la caja al levantarla y situarla sobre la mesa. En estas condiciones, se dice que la caja tiene una *energía potencial*. Si la caja cae, desarrolla su energía potencial y, como el movimiento hacia abajo de la caja es debido a la acción de la fuerza gravitatoria, esta energía se dice que es una *energía potencial gravitatoria*.

Cuando un cuerpo se encuentra en una posición elevada, h , respecto a un punto tomado como referencia, el cuerpo tiene una energía potencial en ese punto, la cual le ha sido transferida por el trabajo realizado contra la fuerza de la gravedad, para llevar el cuerpo a ese punto. Esta energía potencial será tanto mayor cuanto mayor sea la altura. Si en esta posición se suelta el cuerpo, la altura irá disminuyendo, a medida que el mismo se desplaza hacia abajo, por lo cual su energía potencial irá también disminuyendo en cada punto de su trayectoria, hasta hacerse cero al llegar al suelo.

Es oportuno decir aquí que, desde el momento que el cuerpo inicia su caída, éste adquiere una velocidad por la acción de la fuerza gravitatoria, con lo cual, también, en cada punto de su trayectoria, tendrá una energía cinética equivalente a la disminución de la

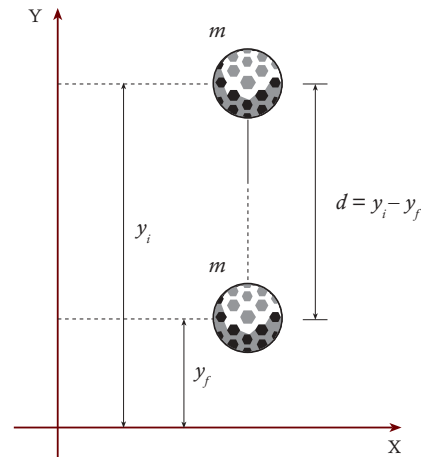


Fig. 14.12 Una pelota de masa m es soltada desde una altura y_i . Cuando la pelota pasa por el punto y_f , la energía potencial gravitatoria es $E_{pg} = mg(y_i - y_f)$.

energía potencial durante la caída. Es decir, la energía potencial se va transformando en energía cinética en cada punto del recorrido. Al llegar al suelo, la caja tendrá su máxima energía cinética y su energía potencial será cero. Como ya sabemos también, esta energía cinética es exactamente igual al valor del trabajo empleado para llevar el cuerpo a la posición elevada h .

La energía potencial gravitatoria de un cuerpo se define como la energía que tiene un cuerpo, debido a su posición en el espacio.

Podemos derivar una expresión de la energía potencial de un cuerpo, refiriéndonos a la fig. 14.12, la cual muestra una pelota de masa m que se suelta de una altura inicial y_i . Si consideramos un punto y_f , en cualquier punto de la trayectoria, el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad en un desplazamiento $d = y_i - y_f$, es igual a:

$$T_g = mgd = mgy_i - mgy_f \quad (14.19)$$

A la cantidad mgy se le define como la *energía potencial gravitatoria*, E_{pg} :

$$E_{pg} = mgy \quad (14.20)$$

De acuerdo con la relación (14.20), la energía potencial gravitatoria de un cuerpo en cualquier

punto en el espacio es igual al producto de su masa por la aceleración de la gravedad en el punto del espacio considerado y por la coordenada vertical de ese punto.

Si hacemos $E_{pi} = mgy_i$ y $E_{pf} = mgy_f$, la relación (14.19) puede escribirse como:

$$T_g = E_{pi} - E_{pf} = -(E_{pf} - E_{pi}) \quad (14.21)$$

La ecuación (14.21) indica que el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad sobre un cuerpo es igual a la energía potencial inicial menos la energía potencial final. De esta ecuación, podemos deducir que el trabajo, T_g , realizado por la fuerza gravitacional, depende sólo de las coordenadas inicial y final del cuerpo, siendo, por lo tanto, independiente de la trayectoria que realice dicho cuerpo. Ten en cuenta, entonces, que la energía potencial gravitatoria de un cuerpo depende únicamente de la altura vertical de éste sobre la superficie de la Tierra. De allí que, el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria sobre un cuerpo que se desplaza verticalmente hacia abajo es idéntico al trabajo realizado sobre el mismo, si éste inicia su movimiento desde el mismo punto, utilizando un tobogán sin fricción cuyo punto final esté fijo en la Tierra. Si el cuerpo se mueve en una trayectoria cerrada donde, finalmente, coinciden el punto final con el inicial, el trabajo será cero.

La unidad de medida de la energía potencial es la misma que la unidad de trabajo, el julio. La energía potencial es un escalar al igual que el trabajo y la energía cinética. También es de advertir que las relaciones (14.19) y (14.20) sólo son válidas para cuerpos muy cercanos a la superficie terrestre, donde la aceleración de la gravedad g sea constante.

Veamos cómo se puede determinar la energía potencial de un cuerpo. Si se tiene un par de zapatos en el tercer estante de un closet y, de repente, se le pregunta a alguien: ¿cuál es la energía potencial de los zapatos?, la respuesta puede prestarse a confusión, ya que si bien se puede saber cuál es el peso de los zapatos, no se ha especificado a partir de qué punto se debe medir h , pues bien pudiera medirse desde el piso, o desde el primer estante del closet o, bien, desde el estante de la vidriera de la zapatería donde los compró.

De lo dicho antes, se desprende que la altura para el cálculo de la energía potencial puede ser medida desde cualquier punto o nivel arbitrario. Normalmente, por comodidad, se elige como nivel de referencia el punto más bajo donde puede caer el cuerpo, en este punto $h = 0$ y, por lo tanto, la energía potencial en este punto de referencia será cero. Lo anterior puede hacerse en base a que sólo se pueden medir cambios en la energía potencial gravitatoria y no la energía total; esto es, un cuerpo a una determinada altura en relación, digamos, al suelo, tendrá una cantidad de energía potencial y a otra altura tendrá otra cantidad de esta energía; de tal manera que para poder medir dichos cambios debemos definir *un nivel de referencia al que le asignemos una energía potencial cero*. También, en base al nivel que se elija con energía potencial cero, la energía potencial gravitatoria puede ser positiva o negativa.

Ejemplo 14.4

Una grúa, fig. 14.13, levanta una caja de 65 kg a una altura de 4 m sobre el suelo y, luego, la baja lentamente desde el punto inicial, A, hasta el punto B, que se ha tomado como nivel cero de energía potencial gravitatoria. Calcular: **a)** La energía potencial gravitatoria inicial de la caja en el punto A. **b)** Calcular la energía potencial final en el punto B. **c)** La diferencia de energía potencial entre estos dos puntos. Si se elije el punto A como el nivel cero, calcular: **d)** La energía potencial inicial en el punto A. **e)** Calcular la potencial final en el punto B. **f)** La diferencia de energía potencial entre estos dos puntos. Si el nivel cero de energía potencial se elije en el punto medio de la altura, punto C; es decir, a una altura de 2 m, determina: **g)** La energía potencial inicial de la caja en el punto A. **h)** La energía final en el punto B. **i)** La diferencia de energía potencial entre estos dos puntos.

Solución

Punto B como nivel cero de la energía potencial

a) E_{pg} inicial en el punto A:

$$E_{pg(i)} = mgy_i = 65 \cdot 9,8 \cdot 4 = 2.548 \text{ J}$$

b) La E_{pg} en el punto B es cero, ya que este punto se

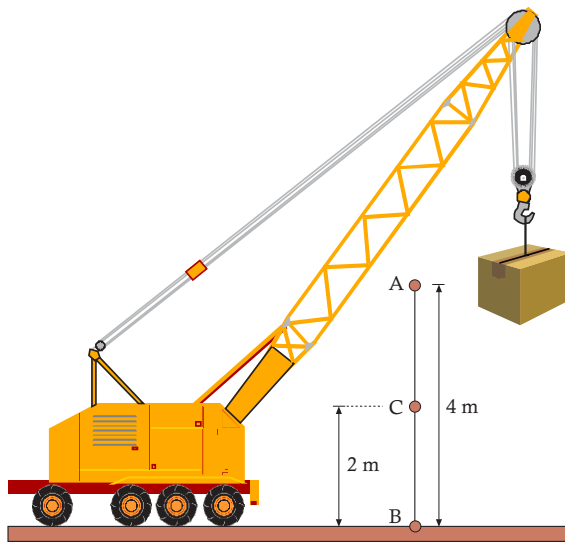


Fig. 14.13 Ejemplo 14.4.

eligió como el nivel cero de la energía potencial.

c) La diferencia de energía potencial entre estos dos puntos es:

$$E_{pg(i)} - E_{pg(f)} = 2.548 - 0 = 2.548 \text{ J}$$

Punto A como nivel cero de la energía potencial

d) En este punto la energía potencial es cero, como consecuencia de haberse elegido este punto como nivel cero.

e) La Energía en el punto B es:

$$E_{pB} = mgy_f = 65 \cdot 9,8 \cdot (-4) = -2.548 \text{ J}$$

Observa que la distancia y_f es negativa, porque el punto final está a 4 m por debajo del nivel elegido como cero de la energía potencial.

f) La diferencia de la energía potencial entre los puntos A y B es:

$$E_{pi} - E_{pf} = 0 - (-2.548) = 2.548 \text{ J}$$

De los resultados obtenidos, se puede ver que la energía potencial de la caja, cuando está sobre el techo de la casa, es 2548 J mayor que la energía potencial en el piso de la caja, sin importar el punto que se elija como el nivel cero.

Punto medio (C) como nivel cero de la energía potencial

g) La energía potencial inicial de la caja en el punto C es:

$$E_{pC} = mgy_i = 65 \cdot 9,8 \cdot 2 = 1.274 \text{ J}$$

h) La energía final en el punto B

$$E_{pB} = mgy_f = 65 \cdot 9,8 \cdot (-2) = -1.274 \text{ J}$$

i) La diferencia de energía potencial entre estos dos puntos.

$$E_{pC} - E_{pB} = 1.274 - (-1.274) = 2.548 \text{ J}$$

14.12 ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA

En Física, el estudio de la fuerza elástica está referida normalmente a la acción de los resortes o muelles, como también se les conoce. Estos objetos tienen una utilidad grande en el mundo de la tecnología. Sabemos, por experiencia propia, que los resortes tienen múltiples aplicaciones, pues los mismos sirven, entre otras cosas, como amortiguadores de los sistemas de rodamiento en los vehículos, mueven cuerpos u objetos conectados a ellos en mecanismos de control mecánico, sirven, también, para hacer funcionar juguetes de niños, como cajitas de música. A las fuerzas ejercidas por un resorte se le conoce como *fuerzas elásticas*.

La fig. 14.14 muestra un resorte que está fijo en uno de sus extremos a una estructura rígida, y en el otro a un bloque. Se supone que el bloque se desliza por una superficie sin fricción. Cuando el resorte es comprimido o estirado, por aplicación de una fuerza externa sobre el bloque, el mismo, de acuerdo con la ley de Hooke, ejercerá una fuerza sobre el bloque de igual magnitud pero de sentido contrario. La fuerza del resorte sobre el bloque realizará un trabajo sobre éste, siendo este trabajo siempre negativo, pues la fuerza que aplica el resorte tiene dirección contraria al desplazamiento. También se cumple, al mismo tiempo, en base a la tercera ley del movimiento de Newton, que la fuerza de reacción aplicada por el resorte es igual y opuesta a la fuerza de acción aplicada por el agente externo

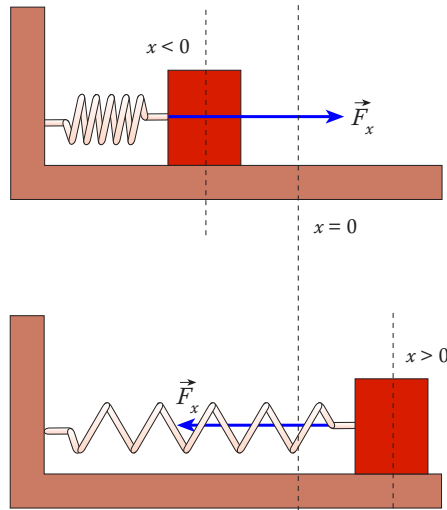


Fig. 14.14 El resorte adquiere una energía potencial elástica como producto del trabajo realizado por una fuerza externa sobre el mismo.

sobre el bloque-resorte. Por lo tanto, al aplicar la fuerza externa sobre el bloque, para comprimir o estirar el resorte, estamos realizando un trabajo positivo sobre el bloque-resorte.

En cualquier caso, el efecto de la fuerza del resorte cuando es dejado libre es, además de ejercer una fuerza sobre el bloque y realizar un trabajo, el de acelerar al bloque, con lo cual éste adquiere energía cinética. Esta energía, por supuesto, no viene de la nada: es el resultado de la energía almacenada por el resorte y que había sido transferida por el trabajo realizado sobre el mismo cuando fue comprimido o estirado. A esta energía almacenada por el resorte, se llama *energía potencial elástica*.

El trabajo realizado por una fuerza variable, de acuerdo con la relación (14.12) es:

$$T = -\frac{1}{2}kx_f^2 + \frac{1}{2}kx_i^2 \Rightarrow T = \frac{1}{2}k(x_i^2 + x_f^2) \quad (14.22)$$

Este trabajo es el que le transfiere la energía potencial elástica al resorte. Observando la ecuación, vemos que el trabajo depende sólo de las coordenadas inicial, x_i , y final, x_f , del cuerpo.

La *energía potencial elástica de un resorte* se define como:

$$E_{pe} = \frac{1}{2}kx^2 \quad (14.23)$$

La relación (14.23) es la expresión de la energía potencial elástica de un resorte de *constante* k , aplicable, tanto para un estiramiento, como para una compresión, x , a partir de la posición de equilibrio $x = 0$. Observa que la expresión de la energía potencial elástica es proporcional al cuadrado de x . Por lo tanto, nunca será negativa y la misma se utiliza, tanto si el resorte ha sido sometido a un estiramiento, como a una compresión. Se tiene, también, que la energía potencial elástica es cero cuando $x = 0$, lo que corresponde a la posición de equilibrio del resorte.

La unidad de medida de la energía potencial elástica es el Joule(J), cuando el valor de k se expresa en Newton por metro (N/m) y la distancia, x , se expresa en metros (m).

La relación (14.22) puede escribirse así:

$$T = \left(-\frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 \right) \quad (14.24)$$

donde la expresión entre paréntesis es la variación de la energía potencial elástica entre las coordenadas final e inicial del desplazamiento del resorte. Esta ecuación puede tomar la forma:

$$T = -(E_{fe} - E_{ie}) \Rightarrow T = -\Delta E_{pe} \quad (14.25)$$

Observa que T , en esta ecuación, es similar a T_g en la relación (14.7) cuando se estudió el trabajo realizado por la fuerza de la gravedad, lo cual era de esperarse, puesto que la energía almacenada tanto por un resorte(energía potencial elástica) como la energía de posición almacenada (energía potencial gravitatoria) dependen sólo de la coordenada inicial y la coordenada final del movimiento de un cuerpo, bajo la acción de la fuerza elástica o gravitatoria

14.13 ENERGÍA MECÁNICA

La energía total de un cuerpo que se desplaza en caída libre, por la acción de la fuerza de la gravedad, es igual a la suma de la energía cinética más la energía potencial que tiene el cuerpo en cada punto de la trayectoria. A la suma de la energía cinética más la energía potencial se le conoce en Física como *energía mecánica*. En esta sección trataremos con mayor amplitud y detalle este concepto.

Cuando una fuerza actúa sobre un cuerpo y causa desplazamiento del mismo, se realiza trabajo sobre dicho cuerpo. En otras palabras, *trabajo es el resultado de una fuerza que, actuando sobre un cuerpo, le causa un desplazamiento*. En todos los casos en los cuales se realiza un trabajo, existe siempre un agente que suministra la fuerza para realizar dicho trabajo. Si en una librería, un nuevo libro que llega es colocado en la estantería de exhibición, entonces el librero suministra la fuerza para hacer el trabajo sobre el libro, colocándolo en el sitio elegido. Si un auto al que se le acabó la gasolina es desplazado a un sitio donde no interfiera el tránsito, dos o más personas suministran la fuerza para hacer el trabajo sobre el carro. Si se elevan materiales, como ladrillos, al tercer piso de un edificio en construcción, una grúa con motor de combustión interna podría suministrar la fuerza para realizar el trabajo sobre los ladrillos.

En los ejemplos mencionados, los agentes que poseen alguna forma de energía suministran la fuerza para el trabajo, y la forma de energía que poseen son, en el caso de las personas que aplican la fuerza, energía potencial química almacenada en los alimentos que ingieren esas personas o, en el caso de la grúa, el combustible del motor, cuya energía química es transformada en trabajo.

En los procesos donde se realiza trabajo, los agentes que intervienen intercambian distintos tipos de energía con los cuerpos con los cuales interactúan. Cuando el librero realiza un trabajo sobre el libro para ubicarlo en el estante de exhibición, el libro adquiere la condición o capacidad de poder realizar un trabajo, si por alguna causa cae en caída libre, capacidad que hemos denominado energía potencial. Igualmente, cuando las personas empujan el carro que se paró por falta de combustible, convierten su trabajo en energía cinética.

Un cuerpo tiene energía mecánica si el mismo está en movimiento y/o está en una posición en el espacio, en relación a una posición de energía potencial cero. Por ejemplo, una pelota de fútbol, cuando es disparada por el arquero con una patada, tiene energía mecánica, debido tanto a la energía cinética que adquiere al ser golpeada, como energía potencial al desplazarse en una trayectoria sobre el nivel del suelo.



Un martillo, cuando se utiliza para golpear un clavo, tiene energía mecánica debido al movimiento (energía cinética), la cual le da la capacidad de aplicar una fuerza sobre el clavo, para producir un desplazamiento de éste dentro de la madera donde se está clavando. Debido a que el martillo tiene energía mecánica, en la forma de energía cinética, es capaz de realizar un trabajo sobre el clavo.



Por lo antes descrito, se puede decir que un cuerpo está en capacidad de realizar un trabajo, si el mismo tiene energía mecánica, bien sea en la forma de energía cinética y/o en la forma de energía potencial. Si un cuerpo se encuentra en movimiento, su energía total en cada punto de su trayectoria es igual a la suma de la energía cinética, la energía potencial gravitatoria y la energía potencial elástica. En fórmulas, podemos escribir:

$$E_m = E_c + E_{pg} + E_{pe} \quad (14.26)$$

donde E_m es la energía mecánica total, E_c es la energía cinética y E_{pg} y E_{pe} corresponden a las energías potencial gravitatoria y elástica, respectivamente.

Ejemplo 14.5

Una bola de masa 0,5 kg es dejada caer desde una altura de 25 m (punto A de la fig. 14.15). Tomando en cuenta el concepto desarrollado sobre la energía mecánica, calcula: **a)** La velocidad de la bola en B, situado a 6 m sobre el nivel del suelo. **b)** Justamente al tocar la bola el suelo, en el punto C. Desprecia la resistencia del aire.

Solución

a) Al soltar la bola, la misma entra en caída libre y la única fuerza que actúa sobre ella es la fuerza de la gravedad. Por lo tanto, de acuerdo con lo explicado antes, la energía mecánica total, en cualquier punto de su trayectoria, es igual a la suma de su energía cinética más la energía potencial.

Cuando la bola está a 25 m, justo antes de soltarla, la misma no tiene energía cinética y la energía mecánica total en este punto es igual a la energía potencial:

$$E_m = 0 + E_{pA} = mgh = 0,5 \cdot 9,8 \cdot 25 = 122,5 \text{ J}$$

Cuando la pelota pasa por el punto B, a 6 m sobre el suelo, la energía mecánica total en ese punto sigue siendo igual a la suma de la energía cinética más la energía potencial en dicho punto y, debido a que la única fuerza que actúa es la fuerza de la gravedad, la energía mecánica total en cualquier punto es la misma, es decir la energía mecánica total de la bola es constante en todo el recorrido; por lo tanto, en el punto B se tiene:

$$E_{mB} = E_{mA} = E_{cB} + E_{pB} \quad (14.27)$$

La energía potencial de la bola en este punto es:

$$E_{pB} = mgh_1 = 0,5 \cdot 9,8 \cdot 6 = 29,4 \text{ J}$$

Sustituyendo el valor de $E_{mA} = 122,5 \text{ J}$ y el valor de $E_{pB} = 29,4 \text{ J}$ en la ecuación (14.28) y despejando E_{cB} se tiene:

$$E_{cB} = 122,5 - 29,4 = 93,1 \text{ J}$$

Utilizando la expresión matemática de la energía cinética se puede calcular la velocidad de la bola en

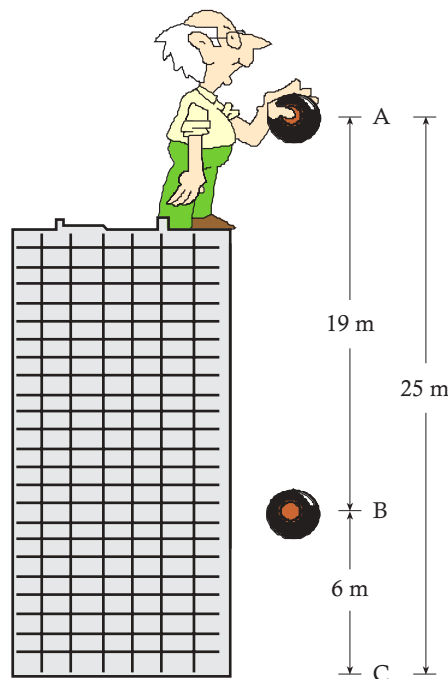


Fig. 14.15 Ejemplo 14.5.

el punto B:

$$v_B = \sqrt{\frac{2E_{cB}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 93,1}{0,5}} = 19,30 \text{ m/s}$$

b) De los análisis anteriores se deduce que, cuando la bola toca el suelo, su energía potencial es cero y podemos escribir:

$$E_{mC} = E_{cC} + E_{pC} = E_{cC} + 0 = E_{cC} = \frac{1}{2}mv_C^2$$

Como sabemos que la energía mecánica se conserva, de la relación anterior calculamos la velocidad:

$$v_C = \sqrt{\frac{2E_{mC}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 122,5}{0,5}} = 22,14 \text{ m/s}$$

Este mismo resultado se puede obtener usando las ecuaciones de la cinemática. Esto se deja como un ejercicio al lector.

14.14 FUERZAS CONSERVATIVAS

Una fuerza es *conservativa* si el trabajo realizado sobre un objeto, para llevarlo de un punto a otro, es independiente de la trayectoria seguida por el objeto.

También se dice que una fuerza es conservativa si el trabajo total realizado sobre un cuerpo es cero, cuando el cuerpo recorre una trayectoria cerrada, con vuelta a su posición inicial.

Cuando estudiamos la energía potencial gravitatoria, vimos que el trabajo realizado sobre un cuerpo por la fuerza de la gravedad venía dado por:

$$T_g = mgd = mgy_i - mgy_f \quad (14.28)$$

Como se puede observar de la relación anterior, el trabajo T_g depende sólo de las coordenadas inicial y final del cuerpo, siendo, por lo tanto, independiente de la trayectoria que siga dicho cuerpo. También se vio, que si el cuerpo se mueve en una trayectoria cerrada, donde, finalmente, $y_i = y_f$, el trabajo T_g será cero.

Lo descrito antes nos lleva a concluir que el trabajo externo empleado para llevar un cuerpo a una determinada altura es igual al trabajo realizado por la fuerza de la gravedad cuando se deja caer libremente ese cuerpo desde esa altura. También significa que el trabajo realizado para subir el cuerpo puede ser recuperado íntegramente al soltar dicho cuerpo. Del análisis precedente se concluye, entonces, que *la fuerza de la gravedad es una fuerza conservativa*.

También, cuando se describió el trabajo realizado por un resorte sobre un bloque, cuando éste se desplaza sin fricción de la posición x_i a la posición x_f , se obtuvo la expresión:

$$T = -\frac{1}{2}kx_f^2 + \frac{1}{2}kx_i^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2}k(x_i^2 - x_f^2)$$

Donde se puede ver que, nuevamente, el trabajo depende sólo de la posición inicial y final del resorte y no de la trayectoria seguida. Se tiene, además, que si el resorte se mueve en una trayectoria cerrada; es decir, si se aplica una fuerza para comprimirlo (agente externo) de su posición inicial, x_i , hasta su posición final, x_f , y, luego, se suelta de esta posición hasta que alcance su posición inicial, x_i , cualquiera que sea la forma de la trayectoria seguida, entonces el trabajo, T , realizado, es cero. Se desprende que *la fuerza ejercida por el resorte es una fuerza conservativa*.

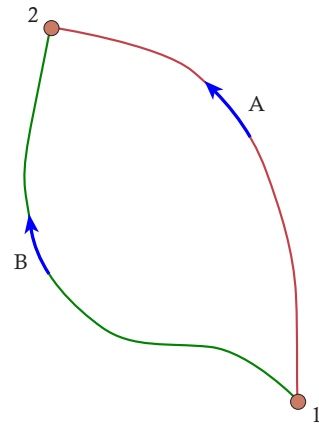


Fig. 14.16 El trabajo realizado por una fuerza conservativa desde el punto 1 al punto 2 es el mismo tanto para la trayectoria A como para la trayectoria B.

Lo anteriormente descrito puede resumirse en la gráfica de la fig. 14.16, donde se puede observar que si un cuerpo se mueve por la acción de una fuerza conservativa del punto 1 al punto 2, el trabajo realizado por la fuerza conservativa es igual en cada caso, tanto para la trayectoria A, como para la trayectoria B. Si el cuerpo, estando en la posición 2 a la cual ha llegado por la trayectoria A, vuelve en sentido contrario a la posición 1 siguiendo la trayectoria B, no realiza trabajo alguno, ya que la trayectoria es cerrada.

El trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre un cuerpo, no altera en absoluto la energía mecánica total adquirida por dicho cuerpo, la cual sigue siendo, en cualquier punto de su trayectoria, igual a la suma de su energía cinética más su energía potencial. Esto significa que *en todo trabajo realizado sobre un cuerpo por una fuerza conservativa, la energía mecánica total de dicho cuerpo se conserva*.

Las fuerzas conservativas que normalmente se estudian en Física corresponden a la fuerza de la gravedad, la fuerza magnética, la fuerza eléctrica y la fuerza elástica o fuerza de los resortes o muelles.

14.15 FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Cuando una fuerza realiza un trabajo sobre un objeto, cuya magnitud no depende de las coordenadas de los puntos inicial y final de la trayectoria, sino que depende de la longitud de la trayectoria, se dice que es una *fuerza no conservativa*. Un ejemplo típico de este tipo de fuerzas no

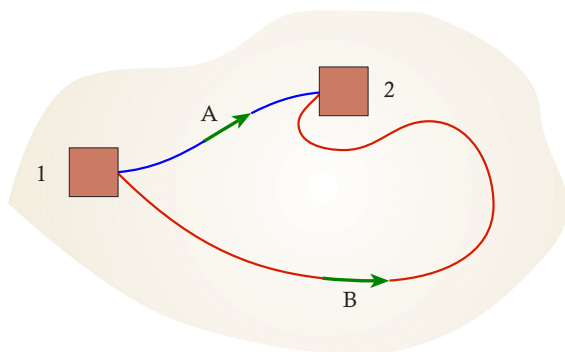


Fig. 14.17 En el caso de las fuerzas no conservativas, como es el referente a la fuerza de fricción, el trabajo realizado por una fuerza F para llevar el bloque desde el punto 1 al punto 2, depende de la trayectoria, A o B, que se siga.

conservativas, es la fuerza de fricción.

Supongamos un bloque sobre una superficie, como se indica en la fig. 14.17, y le aplicamos una fuerza de magnitud F , para llevarlo del punto A al punto B. Se señalan en esa figura dos trayectorias diferentes. En la presencia de una fuerza de fricción, ésta se opone a la fuerza aplicada y produce calentamiento entre el bloque y la mesa. Este calentamiento se transforma en calor, convirtiéndose, en este caso, en una energía irre recuperable. Como la trayectoria B es más larga que la trayectoria A, a lo largo de la primera se produce una mayor disipación de calor, de manera que es mayor el trabajo que debe realizar la fuerza F para llevar el bloque desde el punto 1 al punto 2.

Cuando el bloque llega al punto 2, la fuerza F deja de actuar; es decir, se hace igual a cero y el bloque permanecerá en este punto sin moverse. Este hecho contrasta con el efecto de las fuerzas conservativas, las cuales continúan su acción después de ocurrido el desplazamiento, cuando las fuerzas externas dejan de actuar. Un ejemplo típico lo tenemos cuando aplicamos una fuerza para elevar un objeto a un punto del espacio y, luego, lo soltamos. El mismo cae por la acción de la fuerza de la gravedad que es una fuerza conservativa. Observa que esta fuerza actúa permanentemente durante el proceso de elevar el objeto y continúa actuando cuando dejamos de aplicar la fuerza sobre el objeto.

Las fuerzas no conservativas, al producir un trabajo sobre un cuerpo, modifican la energía mecánica to-

tal del cuerpo. Las fuerzas no conservativas más comunes que se estudian en la Física son las siguientes: Las fuerzas aplicadas, las fuerzas normales, las fuerzas de fricción, las fuerzas de tensión y fuerzas de resistencia del aire.

14.16 CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA TOTAL

Después de estudiar los conceptos de energía mecánica total y de fuerzas conservativas y no conservativas, pasamos a tratar el importante principio de la conservación de la energía mecánica total. Se ha mencionado anteriormente que la energía mecánica es aquella adquirida por los cuerpos, cuando se realiza trabajo sobre ellos y que dicha energía es debida, tanto al movimiento (energía cinética) como a su energía de posición almacenada (energía potencial). El trabajo realizado por una fuerza conservativa sobre un cuerpo, no altera, en absoluto, la energía mecánica total adquirida por dicho cuerpo, la cual sigue siendo igual a la suma de su energía cinética más su energía potencial. Esto significa, simplemente, que la energía mecánica total permanece constante en cualquier punto de la trayectoria a lo largo de la cual se mueve el cuerpo.

Consideremos un cuerpo sobre el cual actúan sólo fuerzas conservativas. Sea, por ejemplo, una pelota que es soltada desde la azotea de un edificio de cierta altura. De acuerdo con el teorema del trabajo y la energía cinética, el cambio de la energía cinética de la pelota es igual al trabajo neto realizado por la fuerza de la gravedad (fuerza conservativa) sobre la pelota, esto es:

$$T_{\text{neto}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

$$T_{\text{neto}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (14.29)$$

Por otra parte, el trabajo T_g , realizado por la fuerza de la gravedad es igual al cambio de la energía potencial de la pelota que, en este caso, corresponde a una disminución de dicha energía y cuya expresión es:

$$T_g = mgd = mgy_i - mgy_f$$

$$T_g = mgd = mgy_i - mgy_f \quad (14.30)$$

Puesto que T_{neto} y T_g son trabajos realizados por la fuerza de la gravedad sobre la pelota, luego que la misma es soltada en caída libre, se tiene entonces que $T_{\text{neto}} = T_g$, de donde:

$$E_{cf} - E_{ci} = -(E_{pf} - E_{pi}) \quad (14.31)$$

La ecuación (14.31) puede escribirse como:

$$\Delta E_c = -\Delta E_p \Rightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = 0 \quad (14.32)$$

Reagrupando términos en la ecuación (14.32), se obtiene:

$$E_{cf} + E_{pf} = E_{ci} + E_{pi} \quad (14.33)$$

Como hemos establecido, la energía mecánica total de un cuerpo es la suma de su energía cinética (E_c), más su energía potencial (E_p). Es decir, $E = E_c + E_p$. A partir de esta definición de la energía mecánica total, podemos ver que la relación (14.33) toma la forma $\Delta E = 0$. Esto significa que, durante el movimiento de la pelota en caída libre, no se produjo ningún cambio en su energía mecánica total. Se deduce, también, que $E_f = E_i$, lo que demuestra que la energía mecánica total de la pelota en cualquier punto de la trayectoria, es igual a la energía mecánica total inicial que tenía cuando se dejó caer. Las relaciones anteriores pueden resumirse en el principio de la conservación de la energía mecánica total:

Si sobre un cuerpo o partícula actúan sólo fuerzas conservativas, la energía mecánica total de dicho cuerpo o partícula se mantiene constante o, en otras palabras, se conserva.



El principio de la conservación de la energía mecánica total nos permite resolver en forma sencilla, desde un enfoque diferente a la aplicación directa de las leyes del movimiento de Newton, problemas de la mecánica en general. Los siguientes aspectos son relevantes:

1. Las leyes del movimiento de Newton se expresan, fundamentalmente, mediante el concepto de fuerza. La fuerza, como sabemos, es un vector, mientras que la energía y el trabajo son cantidades escalares, cuyo manejo matemático es considerablemente más sencillo que las cantidades vectoriales.

2. Las ecuaciones sobre la energía se refieren siempre a estados iniciales y finales de un sistema, con lo cual, detalles del comportamiento de dicho sistema, en el lapso comprendido entre estos estados, no son considerados, facilitando la solución a cualquier problema planteado.

3. Como se dijo al inicio de este capítulo, la utilización de las leyes de Newton puede resultar un proceso difícil y complejo, ya que con frecuencia no se puede disponer de información suficiente sobre cantidad de fuerzas que intervienen en el comportamiento de un sistema; además de que pueden existir fuerzas de acción variable, donde las aceleraciones serán igualmente variables, dificultando cualquier solución planteada. En la práctica, siempre es más fácil medir energías en un sistema, como por ejemplo energías entre átomos y moléculas, que medir las fuerzas que actúan en esos sistemas.

14.17 ENERGÍA MECÁNICA Y FUERZAS NO CONSERVATIVAS

Las fuerzas no conservativas, cuando realizan trabajo sobre un cuerpo, modifican la energía mecánica total de dicho cuerpo. Para explicar con detalle este fenómeno, recordemos el teorema del trabajo-energía cinética, el cual establece que el trabajo neto realizado por la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo, es igual al cambio de energía cinética que experimenta el cuerpo en su movimiento. Aclaremos que las fuerzas componentes de la resultante son fuerzas tanto conservativas como no conservativas.

Ahora bien, cuando intervienen fuerzas no conservativas, el trabajo neto es la suma del trabajo

hecho por las fuerzas conservativas, más el trabajo hecho por las fuerzas no conservativas. Esto es:

$$T_{\text{neto}} = T_{fc} + T_{fnc} \quad (14.34)$$

Donde T_{fc} es el trabajo realizado por fuerzas conservativas y T_{fnc} es el trabajo realizado por fuerzas no conservativas. El primero es igual al cambio de la energía potencial, tal como se ha explicado cuando se estudiaron el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria y el trabajo realizado por la fuerza elástica. En términos de una ecuación, el T_{fc} se expresa como:

$$T_{fc} = E_{pi} - E_{pf} \quad (14.35)$$

La ecuación deducida cuando se describió el teorema del trabajo-energía cinética fue:

$$T_{\text{neto}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (14.36)$$

Igualando las ecuaciones (14.35) y (14.37), se tiene:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = T_{fc} + T_{fnc} \quad (14.37)$$

de donde:

$$\begin{aligned} T_{fnc} &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 - T_{fc} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 - (E_{pi} - E_{pf}) = \\ &= (E_{pf} - E_{pi}) - (E_{pi} - E_{pf}) \end{aligned} \quad (14.38)$$

relación que puede escribirse como:

$$T_{fnc} = E_f - E_i \quad (14.39)$$

De donde,

$$E_f = E_i + T_{fnc} \quad (14.40)$$

De la ecuación (14.39) vemos que el trabajo realizado, T_{fnc} , por las fuerzas no conservativas, modifica el principio de la conservación de la energía mecánica total, ya que dicho principio establece, como se describió antes, que $E_f = E_i$. La modificación de dicho principio está representada por una pérdida o ganancia de la energía mecánica total. Hay que tomar en cuenta que si el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es positivo, entonces la energía mecánica total se incrementa por esa cantidad de trabajo realizado por las mencionadas fuerzas. En cambio, si el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas es negativo, entonces la energía mecánica total se reduce

igualmente en esa cantidad de trabajo. Recuerda que las fuerzas no conservativas mencionadas en la sección dedicada a su estudio son: *fuerzas aplicadas, fuerzas normales, fuerzas de tensión, fuerzas de fricción y fuerzas de resistencia del aire*. La pérdida de energía mecánica es irreparable, ya que con la misma no se puede realizar ningún trabajo mecánico. Dentro del grupo de fuerzas no conservativas es necesario aclarar que las fuerzas de fricción y las fuerzas de resistencia del aire producen siempre una disminución de la energía mecánica total, ya que el trabajo producido por estas es siempre negativo, pues estas fuerzas, invariablemente, se oponen al movimiento de los cuerpos. Las otras fuerzas siempre incrementarán la energía mecánica total. En el caso de las fuerzas de fricción por ejemplo, la cantidad perdida de energía mecánica se transforma en energía interna del sistema conformado por el cuerpo y la superficie sobre la cual se mueve. Esa energía interna transformada se manifiesta como un incremento de la energía cinética y potencial de los átomos que forman el sistema cuerpo-superficie. Esta energía interna del movimiento aleatorio de los átomos se conoce normalmente como *energía térmica*, la cual, al aumentar, se manifiesta por una elevación de la temperatura en las superficies de contacto de los cuerpos que deslizan unos contra otros.

En términos prácticos, todos por experiencia sabemos que si lanzamos una pelota a rodar sobre el piso, la misma, finalmente, llega al reposo. Esto se debe a que la fuerza de roce, que es una fuerza no conservativa, se opone al movimiento de la pelota hasta que esta se detiene. En este caso, partiendo de la definición matemática de la energía mecánica total ($E_m = E_c + E_p$), E_p es cero con relación al piso, ya que la altura $h = 0$. Sin embargo, la energía cinética va disminuyendo por la acción de la fuerza de fricción, hasta hacer que la misma sea cero. La energía mecánica total de la pelota será cero al pararse la misma, lo cual demuestra que no se mantiene el principio de la conservación de la energía mecánica cuando intervienen fuerzas no conservativas.

En conclusión: la energía mecánica total no es que se ha destruido; simplemente, se ha transformado en energía térmica, como se dijo antes, siendo esta energía térmica una energía no disponible para

realizar un trabajo mecánico, por lo que la energía mecánica total no se ha conservado. No obstante, la energía no desaparece, tal como lo establece el principio de conservación de energía, que estudiaremos a continuación.

14.18 ENERGÍA: PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN

Se ha explicado en las secciones anteriores que cuando, simultáneamente, sobre un cuerpo se realiza trabajo por fuerzas conservativas y no conservativas, la energía mecánica total no se conserva. Sin embargo, si bien la parte de la energía producida por las fuerzas no conservativas no es recuperable como para realizar un trabajo mecánico, tal energía no se pierde, porque la misma se transforma, en parte, en energía térmica por la acción de las fuerzas de fricción y en parte aumenta la energía mecánica total por la acción de otras fuerzas no conservativas. Si consideramos que el trabajo realizado por fuerzas no conservativas se divide en trabajo realizado por las fuerzas de fricción y en trabajo por otras fuerzas que no son de fricción como las fuerzas aplicadas, fuerzas de tensión, etc. podemos escribir:

$$\Delta E_c = T_{fc} + T_{fdf} + T_{fnc} \quad (14.41)$$

Donde T_{fdf} es el trabajo realizado por las fuerzas de fricción y T_{fnc} es el trabajo realizado por otras fuerzas no conservativas. El trabajo T_{fdf} expresa el cambio de la energía interna del sistema cuerpo - superficie, como se ha mencionado antes, y el mismo, por ser un trabajo negativo, se puede representar como:

$$T_{fdf} = -\Delta E_{int} \quad (14.42)$$

También, el trabajo T_{fnc} representa el cambio de la energía realizado por otras fuerzas no conservativas diferentes a la fuerza de fricción. O sea, $T_{fnc} = \Delta E_{fnc}$ y como T_{fc} está asociado al cambio de la energía potencial cuya expresión es $T_{fc} = -\Delta E_p$, la relación (14.41) se puede escribir como:

$$\Delta E_c + \Delta E_p + \Delta E_{int} + \Delta E_{fnc} = 0 \quad (14.43)$$

La relación anterior muestra que la suma de todos los cambios de todas las energías posibles de un sistema es cero. Esto, en otras palabras, significa que *la energía total no cambia, la energía total de un sistema se conserva*. Esta conclusión es la expresión de una importante ley de la naturaleza: *la ley de la conservación de la energía*, la cual se expresa así:

La energía total de un sistema, constituida por la energía cinética de sus componentes, la energía potencial asociada a las fuerzas conservativas, la energía interna asociada a la fuerza no conservativa de fricción y la energía asociada a otras fuerzas no conservativas, es constante, se conserva. La energía se puede transformar de una forma a otra, pero no se puede crear ni destruir.

Ejemplo 14.6

Un martillo de masa 1,2 kg se utiliza para introducir un clavo en un pedazo de madera. Al golpear al clavo, el martillo tiene una velocidad de 5 m/s. Si el clavo penetra una distancia de 1,5 cm en la madera, determina la fuerza promedio que ejerce el martillo sobre el clavo.

Solución

El trabajo efectuado sobre el clavo es igual a la fuerza con la cual golpea el martillo, multiplicada por la distancia recorrida por el clavo al introducirse en la madera:

$$T_{\text{sobre clavo}} = F_{\text{martillo}} \cdot \text{Desplaz. clavo} = F_{\text{martillo}} \cdot d_{\text{clavo}} \quad (14.44)$$

El martillo, al golpear sobre el clavo y, luego, detenerse, le transfiere su energía cinética, dada por:

$$E_{\text{cinética martillo}} = \frac{1}{2} m_{\text{martillo}} v_{\text{martillo}}^2 \quad (14.45)$$

Igualando (14.44) y (14.45) y despejando F_{martillo} :

$$F_{\text{martillo}} \cdot d_{\text{clavo}} = \frac{1}{2} m_{\text{martillo}} v_{\text{martillo}}^2$$

$$F_{\text{martillo}} = \frac{m_{\text{martillo}} v_{\text{martillo}}^2}{2 \cdot d_{\text{clavo}}}$$

Sustituyendo valores:

$$F_{\text{martillo}} = \frac{1,2 \cdot 25}{2 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2}} = 1.000 \text{ J}$$

Hay que tener presente que en este ejemplo se ha despreciado la conversión en calor de parte de la energía cinética suministrada por el martillo.

Ejemplo 14.7

Una caja de masa 20 kg se sube por una rampa de 25 m de largo y un ángulo de 10° , como se indica en la fig. 14.18. La fuerza de 80 N, aplicada a la caja, hace que ésta, partiendo del reposo, alcance una velocidad de 3 m/s al final de su recorrido. Determina la fuerza de fricción entre la caja y la superficie de la rampa.

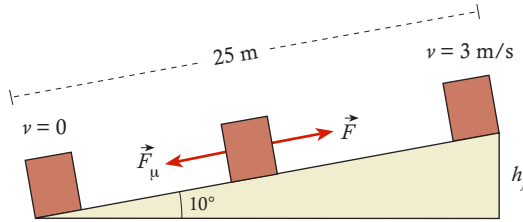


Fig. 14.18 Ejemplo 14.7.

Solución

De acuerdo a lo discutido en este capítulo, el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F}$ es igual a la suma de los incrementos de las energías potencial (ΔE_p) y cinética (ΔE_c), más el trabajo realizado para vencer la fuerza de fricción (T_{F_μ}):

$$T_F = \Delta E_p + \Delta E_c + T_{F_\mu}$$

La altura de la rampa, según la fig. 14.18, es:

$$h_f = 25 \cdot \sin 10^\circ = 25 \cdot 0,18 = 4,34 \text{ m}$$

El trabajo realizado por la fuerza $\vec{F}$ está dado por:

$$T_F = F \cdot d = 80 \cdot 25 = 2.000 \text{ J}$$

Los incrementos de energía potencial y energía cinética, tomando como referencia la base de la rampa y $v_i = 0$, son:

$$\Delta E_c = E_{cf} - E_{ci} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 3^2 - 0 = 90 \text{ J}$$

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= E_{pf} - E_{pi} = mgh_f - mgh_i = \\ &= 20 \cdot 9,8 \cdot 4,34 - 0 = 850,64 \text{ J} \end{aligned}$$

Sustituyendo en la relación (14.44) y, tomando en cuenta que el trabajo realizado por la fuerza de fricción está dado por $T_{F_\mu} = F_\mu \cdot d$, podemos escribir:

$$F_\mu = \frac{2.000 - 90 - 850,64}{25} = 42,37 \text{ N}$$

Ejemplo 14.8

A un resorte de constante $k = 5 \cdot 10^2 \text{ N/m}$ se le une un bloque de masa 2 kg, como se muestra en la fig. 14.19. El resorte se comprime 3 cm con respecto a la posición $x = 0$ y, luego, se suelta. a) Calcula la velocidad del bloque cuando pasa por $x = 0$, si no existiera fricción entre el bloque y la superficie donde descansa. b) Si existiera una fuerza de fricción constante de 2 N en la superficie de contacto del bloque, ¿cuál es la velocidad del mismo al pasar por $x = 0$?

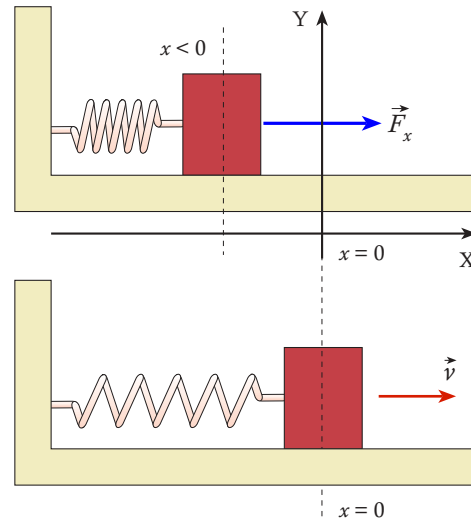


Fig. 14.19 Ejemplo 14.7.

Solución

a) De acuerdo con la relación (14.23), la energía almacenada en el resorte cuando se comprime una distancia $x = -3 \cdot 10^{-2}$ m, está dada por:

$$E_{pe} = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 10^2 (-3 \cdot 10^{-2})^2 = 0,23 \text{ J}$$

Al soltar el resorte, esta energía elástica potencial se convierte en energía cinética. Como $v_i = 0$, se puede escribir:

$$E_{pe} = \Delta E_c = \frac{1}{2} m(v_f^2 - v_i^2) \Rightarrow E_{pe} = \frac{1}{2} m v_f^2$$

Despejando v_f y sustituyendo valores:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot E_{pe}}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,23}{2}} = 0,48 \text{ m/s}$$

b) La fuerza de fricción hace que se pierda energía en forma de calor. Esta energía está dada por el trabajo que hace la fuerza de fricción, de signo negativo, puesto que dicha fuerza se opone al movimiento del bloque. Su valor es:

$$E_{F_\mu} = -2 \cdot (3 \cdot 10^{-2}) = -0,06 \text{ J}$$

La energía que se transmite al bloque es la diferencia entre la energía almacenada en el resorte y la energía perdida por el efecto de la fricción:

$$E_c = 0,23 - 0,06 = 0,17 \text{ J}$$

Finalmente, obtenemos:

$$v_f = \sqrt{\frac{2 \cdot E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0,17}{2}} = 0,41 \text{ m/s}$$

Ejemplo 14.9

Es importante saber que sólo un 13% de la energía que contiene la gasolina de un vehículo se usa para moverlo. El resto se pierde en el motor, el tren motriz y los accesorios. Considera un automóvil de masa

1.000 kg que parte del reposo hasta alcanzar una velocidad de 108 km/h. a) ¿Qué energía se requiere para producir este cambio de velocidad? b) Si un litro de gasolina puede producir una energía de $0,36 \cdot 10^8$ J, y el rendimiento de cada litro es de un 13%, ¿qué cantidad de gasolina se gastó en acelerar el automóvil?

Solución

a) La energía necesaria para acelerar el automóvil desde el reposo hasta alcanzar una velocidad de 108 km/h (30 m/s) es:

$$E_c = \frac{1}{2} m_{\text{auto}} v_f^2 = \frac{1.000 \cdot 30^2}{2} = 4,5 \cdot 10^5 \text{ J}$$

b) Como la eficiencia es del 13%, cada litro de gasolina suministra sólo la cantidad de $0,13 \cdot 0,36 \cdot 10^8$ J = $4,68 \cdot 10^6$ J para el movimiento efectivo del automóvil. El número de litros que se utiliza para acelerar el vehículo desde el reposo hasta una $v = 108$ km/h es:

$$\text{Cant. de gasolina} = \frac{4,5 \cdot 10^5 \text{ J}}{4,68 \cdot 10^6 \text{ J/l}} = 0,096 \text{ litros}$$

Ejemplo 14.10

Una bomba de agua de 2 hp se utiliza para llenar un tanque con un volumen de 10 m^3 , colocado a una altura de 12 m. Determina el tiempo que tardará en llenarlo.

Solución

La potencia de 2 hp de la bomba equivale a:

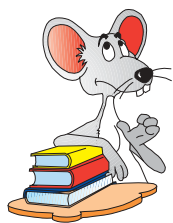
$$2 \cdot 746 \text{ W} = 1.492 \text{ J/s} = 1.492 \frac{\text{kgm}^2/\text{s}^2}{\text{s}}$$

Los 10 m^3 de agua corresponden a un volumen de $10.000 \text{ dm}^3 = 10.000$ litros. Como cada litro tiene una masa de 1 kg, la masa total elevada por la bomba es de 10.000 kg . El trabajo que realiza la bomba para llevar el agua a una altura de 12 m se transforma, una vez en el tanque, en una energía potencial, dada

por $E_p = mgh$. De la expresión para la potencia de la bomba, podemos deducir el tiempo que tarda en llenarse el tanque:

$$P_{\text{bomba}} = \frac{\text{Trabajo bomba}}{\text{Tiempo para llenar el tanque}} = \frac{\text{Energía potencial almacenada}}{\text{Tiempo para llenar el tanque}} = \frac{mgh}{t}$$

$$t = \frac{mgh}{P} = \frac{10.000 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 12 \text{ m}}{1.492 \frac{\text{kgm}^2/\text{s}^2}{\text{s}}} = 788.20 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad t = 13,14 \text{ min}$$



PIENSA Y EXPLICA



14.1 Define el concepto de Energía.

14.2 ¿Qué son energías renovables y energías no renovables? Cita ejemplos de cada tipo de energía.

14.3 ¿Cómo se relaciona el consumo de energía con el desarrollo de los pueblos?

14.4 Define el concepto de trabajo, menciona la unidad en el SI y escribe la relación matemática que lo define. ¿Cuándo se habla de trabajo positivo y de trabajo negativo?

14.5 Haciendo referencia a la fig. 14.4, explica cómo la fuerza de gravedad realiza un trabajo.

14.6 Explica el trabajo realizado en virtud de la energía potencial elástica almacenada en un resorte.

14.7 ¿Qué es la energía cinética? Explica la relación entre energía cinética adquirida por un objeto y el trabajo que sobre el mismo realiza una fuerza externa. Escribe la fórmula de la energía cinética.

14.8 Da la definición de potencia y escribe la fórmula matemática que la relaciona con el trabajo y el tiempo. ¿Cuáles son las unidades de potencia más usadas?

14.9 ¿Es el kWh una unidad de potencia o de energía? Explica.

14.10 Describe qué es la energía potencial gravitatoria y cómo está relacionada con el trabajo realizado por la fuerza de gravedad sobre un objeto.

14.11 Describe la energía potencial elástica de un resorte y la relación que gobierna su expresión. ¿Cómo se relaciona con el trabajo realizado por una fuerza externa que comprime o estira al resorte?

14.12 ¿A qué se denomina energía mecánica de un objeto?

14.13 Mediante los gráficos apropiados, describe fuerzas conservativas y fuerzas disipativas. Da ejemplos de estos tipos de fuerza.

14.14 Explica la relación (14.41) en términos de la energía mecánica total y de las fuerzas no conservativas.

14.15 Enuncia la ley de conservación de la energía y piensa sobre sus consecuencias. ¿Qué significa que la energía no se puede crear ni destruir?



PROBLEMAS



14.1 Una fuerza de 200 N se aplica a un bloque de masa 25 kg que descansa sobre un plano horizontal. Si el bloque recorre una distancia de 20 m, determina el trabajo realizado por la fuerza aplicada si el ángulo que la misma forma con la horizontal es: a) 0° . b) 40° .

14.2 Si en el problema anterior $\mu = 0,18$. a) ¿Cuánto vale el trabajo debido a la fuerza de fricción? b) ¿Cuál es el trabajo neto efectuado sobre el bloque?

14.3 El bloque de 10 kg de la fig. 14.20 es empujado hacia arriba del plano inclinado con una fuerza de 150 N. Si el bloque es desplazado una distancia de 5 m a lo largo del plano y tarda 12 s en cubrir dicha distancia, determina: a) El trabajo realizado por la fuerza aplicada, si el coeficiente de roce es 0,2. b) La potencia que desarrolla la fuerza, expresada en vatios y hp.

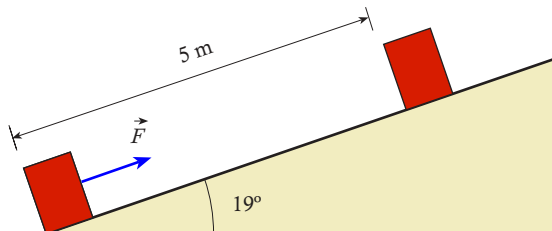


Fig. 14.20 Problema 14.3.

14.4 Una moto de agua, fig. 14.21, posee un motor de 50 hp y se mueve a velocidad constante de 20 km/h. Bajo estas condiciones de velocidad, el agua desarrolla una fuerza que se opone al movimiento y la cual es equilibrada por la fuerza aplicada por el motor de la moto. Determina la fuerza de resistencia del agua.

14.5 Un automóvil de masa igual a 1.400 kg tiene un motor capaz de suministrar 70 hp de potencia a las ruedas. ¿A qué velocidad máxima puede subir una cuesta de 10° ?

14.6 Un resorte de $k = 800 \text{ N/m}$ recibe el impacto de un bloque de masa $m = 2 \text{ kg}$, que se venía moviendo a una velocidad de 15 m/s, como se indica en la fig. 14.22. Como consecuencia del impacto, el resorte se comprime una distancia Δx y el bloque cambia su velocidad a 10 m/s. Determina la compresión que sufre el resorte.



Fig. 14.21 Ejemplo 14.4.

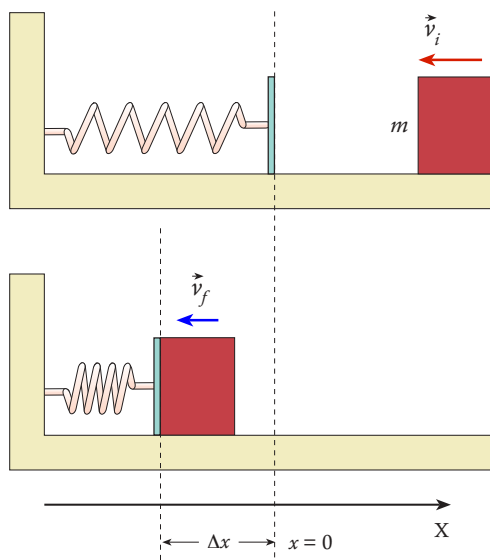


Fig. 14.22 Ejemplo 14.6.

14.7 Un esquiador de masa 70 kg, se lanza, partiendo del reposo, desde una loma de 10 m de altura (punto A de la fig. 14.23.), pasa por el punto más bajo de su trayectoria ($h = 0$) y, luego, asciende hasta una altura de 5 m (punto C). Determina la energía mecánica y la velocidad en cada uno de los puntos: A, B y C. Se supone nulo el rozamiento.

14.8 Se lanza una manzana de 100 g verticalmente hacia arriba, hasta alcanzar su punto más alto a 10 m de altura. **a)** ¿Cuáles son su energía cinética, potencial y mecánica al alcanzar su punto más alto? **b)** ¿Cuál es el valor de estas energías cuando la manzana desciende 4 m desde su punto más alto?

14.9 Un resorte de constante $k = 400 \text{ N/m}$ es impactado por un bloque de 10 kg que se mueve con una velocidad constante de 5 m/s a lo largo del eje del resorte. Determina cuánto se comprime el resorte, una vez que el bloque se detiene. No hay rozamiento.

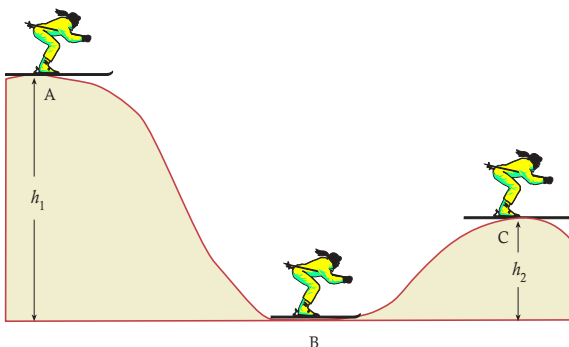


Fig. 14.23 Ejemplo 14.7.

14.10 Un objeto es sometido a la acción de una fuerza variable, como se muestra en la fig. 14.24. Determina el trabajo efectuado por la fuerza cuando el objeto se desplaza: **a)** Desde $x = 0$ hasta $x = 10 \text{ m}$. **b)** Desde $x = 0$ hasta $x = 18 \text{ m}$.

14.11 La fig. 14.25 muestra una caja de masa igual a 10 kg que desliza por una rampa de 4 m de largo que forma un ángulo de 40° con la horizontal. La caja parte del reposo y experimenta una fuerza opuesta, debida a la fricción, de 2 N. ¿Cuál es la velocidad de la caja cuando llega al final de la rampa?

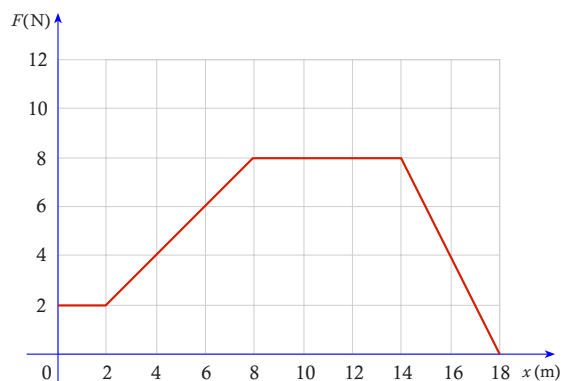


Fig. 14.24 Ejemplo 14.10.

14.12 Un bloque de 50 kg es empujado sobre una superficie horizontal rugosa por una fuerza de 200 N. Si el bloque recorre 10 m a velocidad constante, determina: **a)** El trabajo realizado por la fuerza de 200 N. **b)** La energía que se pierde debido a la fricción. **c)** El coeficiente de fricción cinética.

14.13 Un bloque de masa 5 kg es arrastrado sobre una superficie sin rozamiento por una fuerza constante de 20 N, que forma un ángulo de 20° con respecto a la horizontal. Si el desplazamiento del bloque es de 5 m, determina el trabajo realizado por: **a)** La fuerza aplicada. **b)** La fuerza normal al bloque ejercida por la superficie. **c)** La fuerza de la gravedad. **d)** Calcula las energías potencial y cinética del bloque, al final del recorrido.

14.14 Un objeto de 5 kg cambia su velocidad de 2 m/s a 4 m/s entre dos puntos, A y B, separados 10 m, bajo los efectos de una fuerza externa. **a)** ¿Qué trabajo realiza la fuerza sobre el objeto? **b)** Si durante el trayecto la fuerza de roce realiza un trabajo de 5 J, ¿con qué energía llega el objeto al punto B?

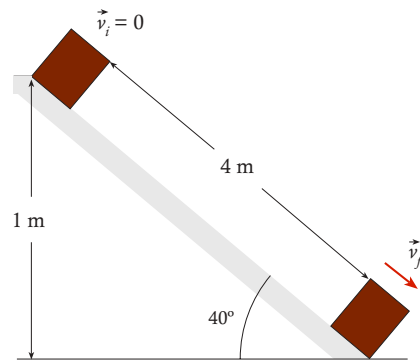


Fig. 14.25 Ejemplo 14.11.

BIBLIOGRAFÍA

1. Alonso, M. y Finn, Edward. *Fundamental University Physics*, Addison-Wesley. 1967.
2. Alvarez, José M. *Física 9*, Editorial Salesiana. 1991.
3. Ballif, J. R., y Dibble W. E. *Física Básica*, Editorial Limusa. 1980.
4. Beiser, Arthur. *Física Aplicada*, McGraw-Hill. 1990.
5. Bloomfield, Louis. *How Things Work: the Physics of Everyday Life*, John Wiley & Sons. 1997.
6. Figueroa Y. Júpiter, *Física 9º Grado*, Colegial Bolivariana, Caracas, 2000.
7. Figueroa, Douglas. *Cinemática, Física para Ciencias e Ingeniería*. 1998.
8. _____ *Las Interacciones Electromagnéticas (Electrostática)*, CENAMEC.
9. Fishbane, P. M., Gasiorowicz, S. Thornton, S. *Física para Ciencias e Ingeniería*, Prentice-Hall Hispanoamericana. 1993.
10. Giancoli, Douglas. *Física General*, Prentice Hall Hispanoamericana. 1988.
11. Hewitt, Paul. *Conceptual Physics*, Addison Wesley. 1997.
12. MacDonald, S, y Burns, D. *Física para las Ciencias de la Vida y de la Salud*, FondoEducativo Interamericano. 1978.
13. Martínez, E. Juan, G. y Cid B., Luis F. *Física*, Editorial Excelencia. 1997.
14. Orear, Jay. *Física Fundamental*, Editorial Limusa. 1971.
15. Requena, O. José, M. *Física 9º Grado*, Editorial Romor.
16. Sears, Francis. *Fundamentos de Física*, Editorial Aguilar. 1971.
17. Serway A. Raymond. *Física*, Tomos I y II, McGraw-Hill. 1998.
18. Tipler, Paul. *Física*, Tomo II, Editorial Reverté. 1985.

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS

 2.1 a) 36° b) -270°

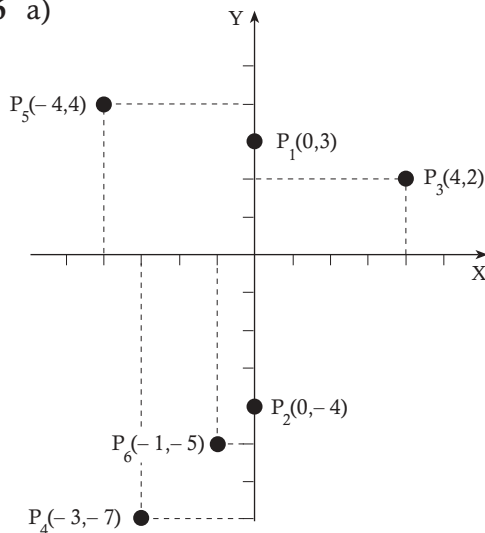
 2.2 a) $1/8$ de revolución a favor del reloj
 b) $1/12$ de revolución contra reloj
 c) 4 revoluciones contra reloj

 2.3 a) $\pi/6$ rad b) $\pi/4$ rad
 c) $\pi/3$ rad d) $-3\pi/4$ rad

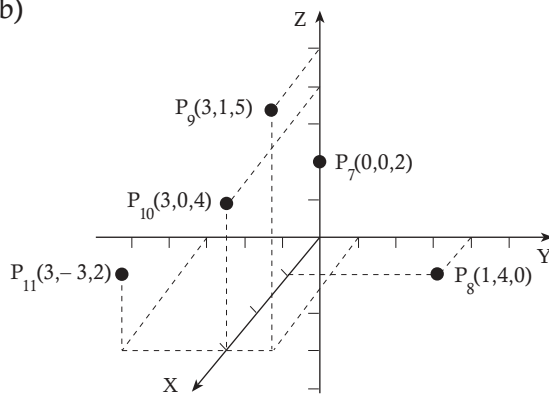
 2.4 a) $0,26$ rad b) $-1,52$ rad
 c) $-2,44$ rad d) $2,83^\circ$

 2.5 a) 45° b) -60°
 c) 720° d) $-67,5^\circ$

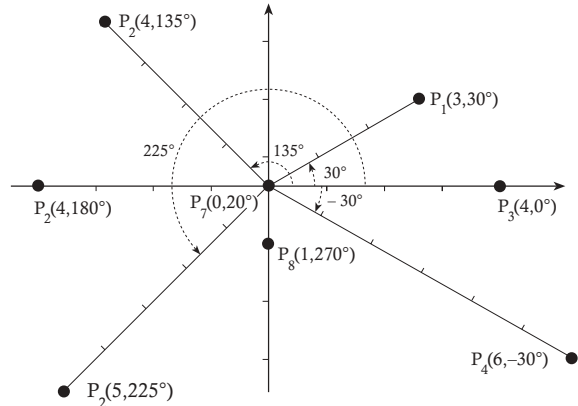
2.6 a)



b)



2.7


 2.8 a) $P_1(5;53;13^\circ)$ b) $P_2(5,39;-68,20^\circ)$
 c) $P_3(5,0^\circ)$

 2.9 a) $P_1(1,04;3,86)$ b) $P_2(8,66;-5)$
 c) $P_3(-3;-5,20)$

 4.1 a) $P(3)$ b) $P(5,4)$ c) $P(5,4,6)$

 4.2 Proyección horizontal: 5
 Proyección vertical: 4

 4.3 a) $8,94$ km b) $8,94$ km c) $26,57^\circ$
 d) $\vec{r} = -4\vec{i} + 8\vec{j} \Rightarrow \vec{r} = (8,94;116,57^\circ)$

 4.4 $F_N = 6,55 \cdot 10^4$ N

 4.5 a) 90 km b) $\vec{r} = 30\vec{i} + 12,68\vec{j}$
 c) Distancia: $32,57$ km Ángulo: $22,91^\circ$

 4.6 $-4,91\vec{i} + 0,22\vec{j} = (4,92;177,43^\circ)$

 4.7 $V_m = 29,54$ km/h

 4.8 La velocidad media es un vector. Si suponemos que la lancha se mueve en línea recta, la velocidad media podría expresarse como: $\vec{v}_m = 29,54\vec{i}$ km/h.

- 4.9 a) 82,5 km/h b) 412,5 km
c) 6,06 h

4.10 $V_m = 85,71 \text{ km/h}$

4.11 $V_m = 80 \text{ km/h}$

- 4.12 a) 18 m b) 18 s c) $V_m = 1 \text{ m/s}$
d) $\vec{r} = 2\vec{i}$ e) $\vec{v}_m = 0,11\vec{i} \text{ m/s}$

4.13 $V_m = 70 \text{ km/h}$

- 4.14 a) $\vec{v} = 49,45\vec{i} + 19,98\vec{j}$
b) $\vec{v} = -46,03\vec{i} - 19,53\vec{j}$

- 4.15 a) OA: $V_m = 10 \text{ m/s}$ $\vec{v}_m = 10\vec{i} \text{ m/s}$
AB: $V_m = 2,5 \text{ m/s}$ $\vec{v}_m = 2,5\vec{i} \text{ m/s}$
BC: $V_m = 0$ $\vec{v}_m = 0$
CD: $V_m = 15 \text{ m/s}$ $\vec{v}_m = 15\vec{i} \text{ m/s}$
DE: $V_m = 30 \text{ m/s}$ $\vec{v}_m = -30\vec{i} \text{ m/s}$
b) $V_m = 10 \text{ m/s}$ $\vec{v}_m = 0$
c) $\vec{v}_{OA} = 10\vec{i} \text{ m/s}$ $\vec{v}_{AB} = 2,5\vec{i} \text{ m/s}$
 $\vec{v}_{BC} = 0 \text{ m/s}$ $\vec{v}_{CD} = 15\vec{i} \text{ m/s}$
 $\vec{v}_{DE} = -30\vec{i} \text{ m/s}$

- 4.16 a) Intervalo OA : $\vec{v}_m = 16\vec{i} \text{ m/s}$
Intervalo AB : $\vec{v}_m = 2,8\vec{i} \text{ m/s}$
Intervalo BC : $\vec{v}_m = -8\vec{i} \text{ m/s}$
Intervalo CD : $\vec{v}_m = 14,33\vec{i} \text{ m/s}$
Intervalo DE : $\vec{v}_m = -15\vec{i} \text{ m/s}$
Intervalo EF : $\vec{v}_m = -50\vec{i} \text{ m/s}$

b) $\vec{v}_m = 0$

- c) Punto A : $v = 6,33 \text{ m/s}$
Punto B : $v = 0$
Punto C : $v = -8 \text{ m/s}$
Punto D : $v = 0$
Punto E : $\vec{v} \rightarrow \infty$

4.17

a) Fig. 4.44(a):

$$t = 2 \text{ s}, x = 20 \text{ m}; \quad t = 5 \text{ s}, x = 20 \text{ m}$$

$$t = 8 \text{ s}, x = 40 \text{ m}; \quad t = 12 \text{ s}, x = 0 \text{ m}$$

Fig. 4.44(b):

$$t = 2 \text{ s}, x = 5 \text{ m}; \quad t = 5 \text{ s}, x = 20 \text{ m}$$

$$t = 8 \text{ s}, x = 40 \text{ m}; \quad t = 12 \text{ s}, x = 0 \text{ m}$$

b) Fig. 4.44(a): $\vec{r} = 0$ Fig. 4.44(b): $r = -20\vec{i}$

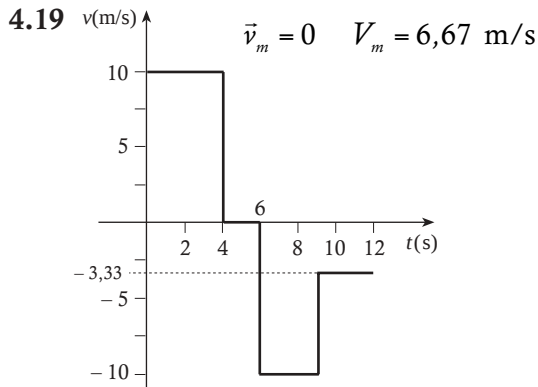
c) Fig. 4.44(a): $d = 80 \text{ m}$

Fig. 4.44(b): $d = 90 \text{ m}$

d) Fig. 4.44(a): $v_m = 6,67 \text{ m/s}$ $\vec{v}_m = 0$

Fig. 4.44(b): $v_m = 7,5 \text{ m/s}$ $\vec{v}_m = -1,67\vec{i}$

4.18 $t = 13,05 \text{ s}$

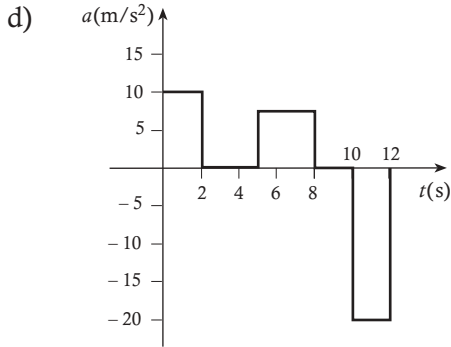


4.20 $3,82\vec{i} + 4,88\vec{j}$ 4.21 $4,31\vec{i} - 10,61\vec{j}$

4.22 a) Intervalos AB y CD: v constante
Intervalos OA y BC: v aumenta
Intervalo DE: v disminuye

- b) Intervalo OA: $a = 10 \text{ m/s}^2$
Intervalo AB: $a = 0$
Intervalo BC: $a = 6,67 \text{ m/s}^2$
Intervalo CD: $a = 0$
Intervalo DE: $a = -20 \text{ m/s}^2$

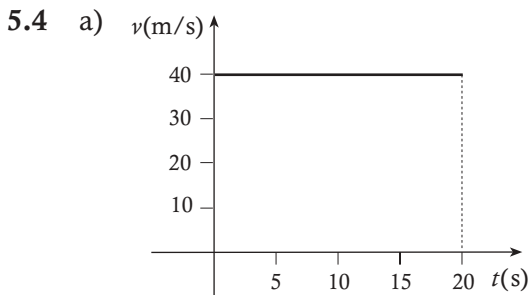
c) Las aceleraciones instantáneas son las mismas aceleraciones medias de la parte b.



5.1 a) $\vec{v}_{AC} = 20\vec{j}$ km/h b) $d = 25$ km

5.2 $\vec{v}_m = 0$ $v_m = 5,09$ m/s

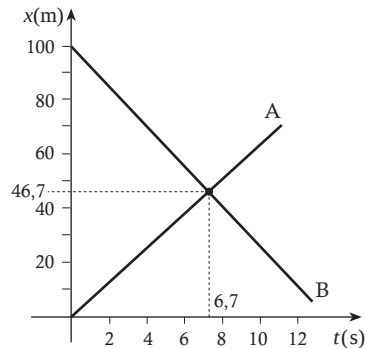
5.3 a) Si b) 28 m c) 0 m
 d) $0 \leq t < 4$ $\vec{v}_m = 2,5\vec{i}$ m/s
 $0 \leq t < 8$ $\vec{v}_m = 0,75\vec{i}$ m/s
 $2 \leq t < 10$ $\vec{v}_m = \pm 0,5\vec{i}$ m/s



b) $\Delta x = 600$ m c) $t = 2,5$ s

5.5 $d = 58,75$ km

5.6 a) 6,67 s b) 46,67 m
 c)



5.7 a) 26,67 s después que parte A o 16,67 s después que parte B.

b) A 666,67 m del punto de lanzamiento.

5.8 a) $\vec{v} = 0,88\vec{i}$ m/s b) $v = 2,5$ m/s

c) $4s < t \leq 5s$ $8s < t \leq 11s$

d) Positiva: $2 < t \leq 4$, $t > 11$

Negativa: $5 < t \leq 8$

5.9 a) $t = 2s$ $v = 12$ m/s

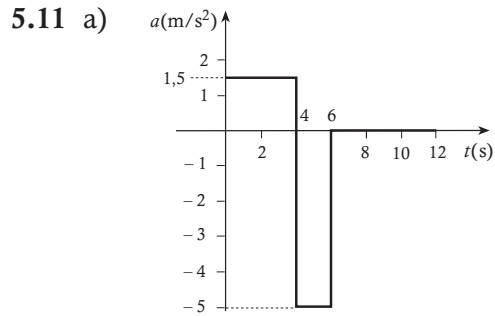
$t = 5s$ $v = 24$ m/s

$t = 8s$ $v = 16$ m/s

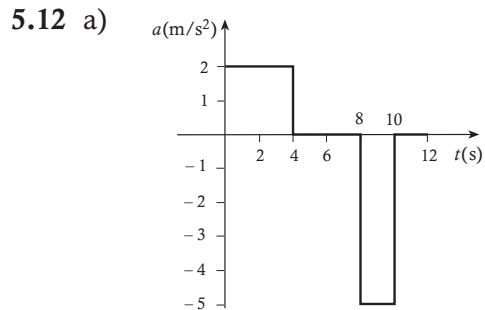
b) $d = 160$ m

c) La partícula baja su velocidad a razón de 4 m/s cada segundo.

5.10 $a = -5$ m/s², la velocidad descende.



b) $a_m = -1/3$ m/s² c) $a = 0$



b) $t = 4s$, $d = 8$ m; $t = 10s$, $d = 34$ m

c) $a = 0$

d) $d_{Total} = 42$ m

5.13 a) Primeros 20 s: $a = 0$.

Entre $t = 20s$ y $t = 30s$: $a = 4$ m/s²

- b) Desplazamiento: $\vec{r} = 1.500\vec{j}$ m
c) $\vec{v}_m = 70\vec{j}$ m/s
- 5.14 a) $2,47 \text{ m/s}^2$ b) $t = 4,5 \text{ s}$
- 5.15 a) 28 m/s b) $d = 90 \text{ m}$
- 5.16 a) 50 s b) $0,04 \text{ m/s}^2$ c) $v_f = 1,26 \text{ m/s}$
- 5.17 a) $v = 92,95 \text{ m/s}$ b) $t = 7,75 \text{ s}$
- 5.18 a) $4,63 \text{ m/s}^2$ b) $\Delta x = 48,62 \text{ m}$
- 5.19 a) $7,2 \text{ s}$ b) No hay impacto.
c) $d = 55,48 \text{ m}$
- 5.20 $d = 3.600 \text{ m}$
- 5.21 a) 2 m/s^2 b) 225 m c) 30 m/s
- 5.22 a) $-1,25 \text{ m/s}^2$ b) $145,8 \text{ m}$ c) $16,66 \text{ s}$
- 5.23 a) $19,6 \text{ m}$; $78,4 \text{ m}$ b) $t = 4,29 \text{ s}$
c) $19,6 \text{ m/s}$; $39,2 \text{ m/s}$
- 5.24 a) $4,08 \text{ s}$ b) $81,63 \text{ m}$
c) $26,80 \text{ m/s}$ d) $18,98 \text{ m/s}$
- 5.25 $1,84 \text{ s}$
- 5.26 a) $11,43 \text{ m/s}$ b) $3,59 \text{ m/s}$
c) $0,74 \text{ s}$
- 5.27 a) $36,8 \text{ m}$ b) $3,14 \text{ s}$ c) $25,85 \text{ m/s}$
- 5.28 $h = 10,73 \text{ m}$
- 6.1 a) $1,23 \text{ m}$ b) 10 m c) 7 m/s
- 6.2 a) $257,5 \text{ m}$ b) $44,1 \text{ m}$ c) $63,53 \text{ m/s}$
- 6.3 a) $61,95 \text{ m}$ b) $3,56 \text{ s}$ c) $96,53 \text{ m/s}$
- 6.4 a) $31,94 \text{ s}$
b) $\vec{v} = 300\vec{i} + 313,01\vec{j}$ m/s
 $v = 433,56 \text{ m/s}$
c) $v = 303,98 \text{ m/s}$; $\theta = 9,28^\circ$
- 6.5 a) 3 m b) $0,78 \text{ s}$ c) $12,58 \text{ m/s}$
d) $19,57 \text{ m}$
- 6.6 a) $13,52 \text{ m}$ b) $3,32 \text{ s}$ c) 22 m/s
d) $48,94 \text{ m}$
- 6.7 a) $390,83 \text{ m/s}$ b) $2.805,43 \text{ m}$
c) $15.007,49 \text{ m}$
- 6.8 a) $31,32 \text{ m/s}$ b) $21,92 \text{ m}$
c) $4,24 \text{ s}$ d) $\theta = -34^\circ$
- 6.9 a) $95,79 \text{ m}$ b) $598,77 \text{ m}$ c) $10,41 \text{ s}$
- 6.10 Sí choca; $h = 11,23 \text{ m}$
- 6.11 a) $\theta = 76,88^\circ$ o $\theta = 31,80^\circ$
b) $x = 162,42 \text{ m}$ o $x = 329,04 \text{ m}$
- 7.1 a) $458,37^\circ$ b) $1.718,87 \text{ rpm}$
c) $12\pi \text{ rad/s}$
- 7.2 $2,5 \text{ rad}$ 7.3 72.030°
- 7.4 $27,29 \text{ rev}$
- 7.5 a) $-\frac{110\pi}{9} \text{ rad/s}^2$ b) $72,5 \text{ rev}$
c) $5,46 \text{ s}$
- 7.6 a) $51,57 \text{ vueltas}$ b) $515.662,06^\circ$
- 7.7 a) 10 m/s b) $a_T = 0$
c) 50 m/s^2 d) 200 N
- 7.8 a) $87,57 \text{ rad/s}$ b) $250,33 \text{ rad}$
c) $162,57 \text{ m/s}$ d) 26.429 rad/s^2

- 7.9** a) 183,67 m b) - 5.381 N
- 7.10** a) $\frac{\pi}{3}$ rad/s b) 5,24 m/s
 c) 5,49 m/s² d) 300 vueltas e) 10 min
- 7.11** a) $4,11 \cdot 10^{-5}$ rad/s b) 17.247,96 m/s
 c) 0,71 m/s²
- 7.12** $v_T = 15,34$ m/s
- 7.13** a) $a = 16,67$ m/s²; $F = 52,93$ N
 b) $a = 32,67$ m/s²; $F = 45,74$ N
- 7.14** $v = 1.024,85$ m/s $a_R = 2,73 \cdot 10^{-3}$ m/s²
- 7.15** $x = 1,98$ m
- 8.1** a) 0,5 s
 b) $v = -0,72$ m/s; $a = -0,99$ m/s²
- 8.2** a) $A = 2$ m; $f = 0,80$ Hz;
 $\omega = 5$ rad/s; $\phi = 1$ rad
 b) $t = 4$ s $x = -1,10$ m
 $t = 10$ s $x = 1,48$ m
 c) $v = -10 \operatorname{sen}(5t + 1)$ $a = -50 \cos(5t + 1)$
 d) $v = -7,63$ m/s $a = -32,35$ m/s²
- 8.3** a) $f = 0,5$ Hz; $\omega = 3,14$ rad/s; $A = 0,1$ m
 b) $v = -0,314 \operatorname{sen}(3,14t)$
 $a = -1,00 \cos(3,14t)$
 c) $x = 0,1$ m; $v \approx 0$; $a \approx -1$ m/s²
- 8.4** $f = 0,32$ Hz; $v = -2,18$ m/s; $a = 2$ m/s²
- 8.5** a) $\theta = 1,05$ rad = 60°
 b) $x = 0,01 \cos(125,66t)$
 $v = -1,26 \operatorname{sen}(125,66t)$
 $a = -157,90 \cos(125,66t)$
- 9.1** a) $\vec{F}_R = 0$
 b) Se puede mover con movimiento uniforme.
- 9.2** a) $f_{\mu_e} = 3,68$ N b) No se mueve
- 9.3** a) $T = 98$ N b) Si
- 9.4** a) $\vec{v}_R = (275,19 \text{ km/h}, -5,48^\circ)$
 b) $\vec{v}_R = (196,98 \text{ km/h}, -15,29^\circ)$
- 9.5** a) $W = 27,33$ N
 b) $T_A = 42,6$ N $T_B = 64,93$ m
 $T_C = 49$ N
- 9.6** $F_R = 28$ N; 2,86 m de la fuerza F_2 .
- 9.7** $F_R = 33$ N; 1,27 m del extremo derecho.
- 9.8** $F_1 = 60$ N $F_2 = 40$ N
- 9.9** $F_2 = 80$ N ; $b = 0,175$ m
- 9.10** $F_2 = 5$ N $b = 24$ cm
- 9.11** a) 58,8 N b) 57,87 N
- 9.12** $F_R = 5,52$ N
- 9.13** a) $\theta = 0^\circ$, $F = 122,5$ N
 b) $\theta = 45^\circ$, $F = 115,49$ N
- 10.1** $F_e = 2,3 \cdot 10^{39} F_g$
- 10.2** $r = 51,65 \cdot 10^{-4}$ m
- 10.3** $m = 24,50$ kg
- 10.4** $F = 1,67 \cdot 10^{-11}$ N, fuerza de atracción.
- 10.5** $\vec{F}_R = (-0,43\vec{i} + 0,26\vec{j}) \cdot 10^{-11}$
 $= (0,50 \cdot 10^{-11}; 148,84^\circ)$
- 10.6** $F = 540$ N
- 10.7** Fuerza sobre Q_1 : $5,63\vec{i} - 45\vec{j}$
 Fuerza sobre Q_2 : $-77,63\vec{i} + 36\vec{j}$
- 10.8** $\vec{F}_R = (65,60; 149,04^\circ)$

- 11.3 a) 13,05 N b) 188,5 N c) 196 N
d) 0,07
- 11.4 a) $a = 5,6 \text{ m/s}^2$ b) $T = 16,8 \text{ N}$
- 11.5 a) $a = 5,15 \text{ m/s}^2$ b) $T = 46,46 \text{ N}$
- 11.6 a) $a = 4,41 \text{ m/s}^2$ b) $T = 53,86 \text{ N}$
- 11.7 a) $a = 2,5 \text{ m/s}^2$ $T = 265,67 \text{ N}$
b) $a = 0,57 \text{ m/s}^2$ $T = 277,29 \text{ N}$
- 11.8 $a = 2,45 \text{ m/s}^2$ $T = 36,75 \text{ N}$
- 11.9 $\mu = 0,91$
- 11.10 $F = 118,27 \text{ N}$
- 11.11 a) $\theta = 44,43^\circ$ b) $\theta = 37,62^\circ$
- 11.12 $a = 4,57 \text{ m/s}^2$ $T_{23} = 36,56 \text{ N}$
 $T_{12} = 13,71 \text{ N}$
- 11.13 $a = 2,61 \text{ m/s}^2$ $T_{23} = 50,33 \text{ N}$
 $T_{13} = 37,23 \text{ N}$
- 11.14 a) $g = 9,53 \text{ m/s}^2$; 2,76 %
b) $g = 7,35 \text{ m/s}^2$; 25 %
c) $g = 0,126 \text{ m/s}^2$; 98,71 %
- 11.15 Ascensor sube: 1.180 N
Ascensor baja: 780 N
- 11.16 $P_{\text{Júpiter}} = 2.267,10 \text{ N}$
- 11.17 $M_{\text{Sol}} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
- 11.18 $m_{\text{En la Luna}} = 1.200 \text{ kg}$
 $P_{\text{En la Luna}} = 1.956 \text{ N}$
 $m_{\text{Júpiter}} = 1.200 \text{ kg}$
 $P_{\text{Júpiter}} = 30.228 \text{ N}$
- 12.1 $T = 124,93 \text{ N}$
- 12.2 En el caso (b)
- 12.3 a) 98 N b) 98 N c) 53,58 N
- 12.4 a) Cuerda NC: 3,92 N
Cuerda MB: 5,88 N
Techo: 7,84 N
b) $z = 10 \text{ cm}$ $y = 12,5 \text{ cm}$ $x = 10 \text{ cm}$
- 12.5 a) 49 cm b) 3,43 N
- 13.1 a) $\Delta p = 60 \text{ kgm/s}$ b) $v_f = 25 \text{ m/s}$
- 13.2 $v = 3,33 \text{ m/s}$
- 13.3 $v = 3,33 \text{ m/s}$ hacia la izquierda.
- 13.4 $v'_2 = 14,35 \text{ m/s}$ hacia el norte.
- 13.5 $\vec{p} = (2,04\vec{i} + 0,95\vec{j})$
- 13.6 $v'_2 = 160 \text{ m/s}$
- 13.7 $v'_2 = 257,50 \text{ m/s}$
- 13.8 $p = 222,40 \text{ Ns}$
- 13.9 $v_R = 2,25 \text{ m/s}$
- 13.10 a) $v = 12,31 \text{ km/h}$ b) Sí se perdió.
- 13.11 a) $v = 1,54 \text{ km/h}$ b) Sí se perdió.
- 13.12 $v'_b = 1,4\vec{i} - 1,5\vec{j} \text{ m/s} = (2,05; -46,97)$
- 13.13 $v'_b = 3,31\vec{i} - 0,58\vec{j} \text{ m/s}$
- 13.14 $v'_b = -3,86\vec{i} + 3,71\vec{j} \text{ m/s}$
- 13.15 a) $v_B = 0,13 \text{ m/s}$ b) $F = 784 \text{ N}$
c) $E_{\text{CA}} = 548,8 \text{ J}$; $E_{\text{CN}} = 25,35 \text{ J}$
- 14.1 a) 4.000 J b) 3.064,18 J

14.2 a) $T_{\mu} = 882 \text{ J}$

b) $\theta = 0^\circ$, $T_{\text{neto}} = 3.118 \text{ J}$;

$\theta = 40^\circ$, $T_{\text{neto}} = 2.182,18 \text{ J}$

14.3 a) 750 J b) $62,5 \text{ W} = 0,084 \text{ hp}$

14.4 $F = 6.708,63 \text{ N}$

14.5 $v = 78,91 \text{ km/h}$

14.6 $\Delta x = 0,56 \text{ m}$

14.7 A: $E_c = 0$, $E_p = 6.860 \text{ J}$, $E_m = 6.860 \text{ J}$; $v_A = 0$

B: $E_p = 0$, $E_c = 6.860 \text{ J}$, $E_m = 6.860 \text{ J}$; $v_B = 14 \text{ m/s}$

C: $E_p = 3.430 \text{ J}$, $E_p = 3.430 \text{ J}$, $E_m = 6.860 \text{ J}$; $v_C = 9,9 \text{ m/s}$

14.8 a) $E_c = 0$; $E_p = 9,8 \text{ J}$; $E_m = 9,8 \text{ J}$

b) $E_c = 3,92 \text{ J}$; $E_p = 5,88 \text{ J}$; $E_m = 9,8 \text{ J}$

14.9 $\Delta x = 0,79 \text{ m}$

14.10 a) 50 J b) 98 J

14.11 $v_f = 4,24 \text{ m/s}$

14.12 a) $T = 2.000 \text{ J}$ b) $E_{\mu} = 2.000 \text{ J}$

c) $\mu = 0,41$

14.13 a) $93,94 \text{ J}$

b) 0

c) 0

d) $E_p = 0$; $E_c = 93,4 \text{ J}$

14.14 a) 30 J

b) 25 J